

MECÁNICA TEÓRICA

José A. Oller

Departamento de Física
Universidad de Murcia
E-30071 Murcia

E-Mail: oller@um.es

Contenidos

1. Dinámica Newtoniana y ecuaciones de Lagrange	6
1.1. Mecánica de una partícula	6
1.1.1. Momento lineal y fuerza	6
1.1.2. Momento angular	7
1.1.3. Energía	7
1.2. Mecánica de un sistema de partículas	9
1.2.1. Momento lineal, fuerzas externas e internas	9
1.2.2. Momento angular	10
1.2.3. Energía	11
1.3. Ligaduras	13
1.4. El principio de D'Alembert y las ecuaciones de Lagrange	15
1.5. Potenciales electromagnéticos y función de disipación de Rayleigh	20
1.5.1. Potenciales electromagnéticos	20
1.5.2. Función de disipación de Rayleigh	22
2. Simetrías y Teoremas de Conservación I. Mecánica Lagrangiana	23
2.1. Principio de Hamilton	23
2.2. Principio de Relatividad de Galileo	25
2.3. Lagrangiano de una partícula libre	26
2.4. Lagrangiano de un sistema de partículas	28
2.5. Teorema de Noether	28
2.6. Teorema de conservación de la Energía	30
2.7. Ímpetu	31
2.8. Momento angular	33
2.9. Transformaciones de escala	33
2.10. El problema de tres cuerpos: solución de Lagrange	36
2.11. El principio de la ligadura mínima de Gauss	41
2.12. El principio de Hamilton con ligaduras	43
2.12.1. Ligaduras holonómicas	43
2.12.2. Ligaduras no holonómicas	45
2.13. Variables ignorables o cíclicas	51
2.14. El tiempo como variable cíclica o ignorable: el principio de Jacobi y el principio de mínima acción	54
2.15. Pequeñas vibraciones alrededor de un punto de equilibrio	57

3. Teoría de Hamilton	66
3.1. Transformaciones de Legendre	66
3.2. Transformaciones de Legendre aplicadas al Lagrangiano	67
3.3. Ecuaciones canónicas	69
3.3.1. Notas	70
3.4. La integral canónica	71
3.5. Los corchetes de Poisson	75
3.5.1. Propiedades de los corchetes de Poisson	75
3.6. El teorema de los corchetes de Poisson	78
3.7. El espacio de fases y el fluido de fases	81
3.8. El teorema de Liouville	82
3.9. El teorema de la circulación de Helmholtz	84
3.10. Eliminación de variables ignorables. La función de Routh	85
3.11. Forma paramétrica de las ecuaciones canónicas	87
4. Transformaciones Canónicas	94
4.1. Función Generatriz	94
4.2. Transformaciones canónicas básicas	99
4.2.1. Ejemplos de transformaciones canónicas	104
4.3. Transformaciones de Mathieu-Lie	106
4.4. Forma diferencial bilineal invariante	109
4.4.1. Los corchetes de Lagrange	113
4.4.2. Relación entre los corchetes de Poisson y de Lagrange	114
4.5. La forma simpléctica de las transformaciones canónicas	115
4.5.1. Transformaciones canónicas restringidas	115
4.5.2. Transformaciones canónicas dependientes del tiempo	117
4.5.3. Transformación canónica infinitesimal	118
4.6. Invariancia de los paréntesis de Poisson y el volumen bajo transformaciones canónicas	122
4.7. El movimiento de un sistema como una sucesión continua de transformaciones canónicas	123
5. Simetrías y teoremas de conservación II. Ecuación de Hamilton-Jacobi	125
5.1. Familias de transformaciones canónicas. Generadores infinitesimales	125
5.2. Simetrías y leyes de conservación	129
5.3. La ecuación de Hamilton-Jacobi	131
5.3.1. Otra forma de llegar a la ecuación de Hamilton-Jacobi	136
5.4. Separación de variables	136
5.4.1. Sistemas acotados y separables	139
5.5. Variables acción ángulo	141
5.6. Problema de fuerzas centrales	145
5.6.1. Método de Hamilton-Jacobi para el problema de fuerzas centrales	145
5.6.2. Variables acción ángulo en el problema de fuerzas centrales	146

6. Teoría de Perturbaciones Canónica	149
6.1. Introducción	149
6.2. Teoría de perturbaciones dependiente del tiempo	149
6.2.1. Dependencia temporal de las “constantes” de la órbita	152
6.3. Teoría de perturbaciones directa	155
6.4. Invariantes adiabáticos	156
7. Teoría clásica de campos	162
7.1. Introducción: Transición de un sistema continuo a otro discreto	162
7.1.1. La cadena lineal	162
7.2. Formulación Lagrangiana de la teoría de campos	165
7.2.1. Derivada funcional	168
7.3. Teorema de Noether e integrales de las ecuaciones de campo	169
7.3.1. Teorema de Noether aplicado a una rotación global de la cadena lineal	174
7.4. Tensor de energía-momento	177
7.5. Tensor de momento angular	181
7.5.1. Transformaciones de Lorentz	181
7.5.2. Clasificación de las transformaciones de Lorentz	182
7.5.3. Generadores infinitesimales	184
7.5.4. Conmutadores	187
7.5.5. Tensor de momento angular	187
7.6. Simetrías internas	189
7.7. Formulación Hamiltoniana	191
7.7.1. Generalización. Ecuaciones canónicas	192
7.8. Dependencia temporal de las variables dinámicas	194

Agradecimientos de J.A.O.

Me gustaría agradecer al Prof. Rafael Chicón el haberme dado a conocer las referencias [1] y [2] que han sido extensamente empleadas para la elaboración de las secciones 2.12–2.15 y de los capítulos 3–5. Por supuesto, agradecer el arduo trabajo de proporcionarme una primera versión transcrita en LaTeX de mis notas de clase a Juan Francisco González. También me gustaría agradecer a mi mujer María José el tener la paciencia de facilitarme el tiempo suficiente para confeccionar este manual.

Agradecimientos de Juan F. González.

Estas líneas que a continuación escribo, ya han sido citadas en algunos libros, pero creo que sólo ahora, con mi trabajo *amanuense* es cuando realmente las comprendo y las vivo:

“Un libro. Naturalmente al principio sólo es una montaña de apuntes manuscritos cuyo contenido espera un destino más diferente a un simple archivador, un trabajo duro y difícil. No me impediría existir ni sentir que existo. Pero llegaría un momento en que el libro estaría escrito, estaría detrás de mí, y pienso que un poco de claridad caería sobre mi pasado.”

A José Antonio Oller, le debo un infinito no numerable de gracias, por su apoyo y por lo que este libro ha hecho, hace y hará para mí.

Espero que este libro, leído, pensado, y complementado con el trabajo del lector, sirva para ayudar al futuro Físico a comprender la importancia de la Mecánica Teórica y a desarrollar tras un tiempo razonable la capacidad de interconectar los conceptos clásicos y modernos. La Física al igual que las Matemáticas, construyen una cadena de conocimientos, y es el alumno el que debe ser responsable de que esta cadena sea lo suficientemente segura.

Más de la mitad de mi transcripción se ha realizado con la banda sonora de los conciertos completos para piano y orquesta de Mozart (27 en total junto con parte de la sonata KV448 interpretada por Murray Perahia y Rudu Lupu, para cuatro manos, dos pianos), algunas piezas de piano de Yann Tiersen, otras de John Williams, versiones de Rachmaninoff (“The flight of the Bumblebee”), Michael Nyman (al que todavía intento interpretar a piano correctamente cuando me desespero en mis cálculos, y siguiendo este camino al pie de la letra ya sería virtuoso), el concierto número 1 de Tchaikovsky para piano y orquesta, las sonatas de Beethoven, “El Mesías” de Handel, “La Traviata” de Verdi, “Fígaro” de Rossini (interpretada por Luciano Pavarotti) y los conciertos de Brandenburgo de Bach (en particular el 2 y el 5, mis favoritos). Pero, aún debería añadir otras obras más modernas, a parte de la “Sinfonía para teclado y ventilador de ordenador”. Tal vez en otra ocasión sean citadas.

Capítulo 1

Dinámica Newtoniana y ecuaciones de Lagrange

1.1. Mecánica de una partícula

1.1.1. Momento lineal y fuerza

El momento lineal \vec{p} , viene definido por:

$$\vec{p} = m\vec{v}, \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (1.1)$$

En un sistema de referencia inercial (aquel donde se cumple la primera ley de Newton), se tiene:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad (1.2)$$

\vec{F} se debe a la interacción de la partícula con otras partículas y campos, p.e., interacción gravitatoria, electromagnética, etc. La expresión anterior se conoce como segunda ley de Newton.

Tomando m constante:

$$\vec{F} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m\vec{a}. \quad (1.3)$$

Es una ecuación diferencial de segundo orden y, por tanto, para determinar $\vec{r}(t)$ se necesitan conocer $\vec{r}(0)$, $\dot{\vec{r}}(0)$. Así el estado de una partícula viene

determinado una vez se conozcan \vec{r} y $\dot{\vec{r}}$, en un tiempo t , ya que haciendo uso de las ecuaciones de movimiento queda fijada su evolución temporal.

Muchos resultados importantes se expresan en Mecánica como leyes de conservación:

Conservación del momento lineal de una partícula

Si la fuerza total que actúa sobre una partícula es cero, $\vec{F} = 0$, entonces, según (1.2), $\dot{\vec{p}} = 0$ y \vec{p} es una constante de movimiento.

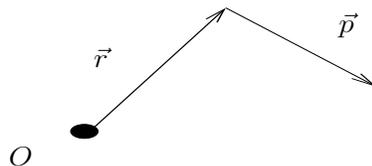


Figura 1.1: Momento angular de una partícula respecto a un punto O .

1.1.2. Momento angular

El momento angular de una partícula respecto de un punto (depende del punto O que se tome), viene dado por:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}, \quad (1.4)$$

véase figura (1.1).

Y el momento de una fuerza \vec{F} respecto a dicho punto:

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (1.5)$$

Observemos que como consecuencia de (1.2):

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{N}. \quad (1.6)$$

CONSERVACIÓN DEL MOMENTO ANGULAR DE UNA PARTÍCULA

Si el momento de la fuerza total es cero, $\vec{N} = 0$, entonces \vec{L} es una constante de movimiento.

1.1.3. Energía

El trabajo entre dos puntos, 1 y 2, de una fuerza \vec{F} es:

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{s}. \quad (1.7)$$

Luego:

$$W_{12} = \int_1^2 \frac{d\vec{p}}{dt} d\vec{s} = \int_1^2 m \frac{d\vec{v}}{dt} \vec{v} dt = \frac{m}{2} \int_1^2 \frac{d\vec{v}^2}{dt} dt = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2). \quad (1.8)$$

Si definimos $T = \frac{1}{2} m v^2$ como la *Energía Cinética*, tenemos:

$$W_{12} = T_2 - T_1. \quad (1.9)$$



Figura 1.2: El trabajo de una fuerza conservativa sobre una trayectoria cerrada es nulo.

Si el trabajo entre dos puntos W_{12} realizado por el campo de fuerzas no depende del camino seguido, *el campo de fuerzas se dice que es conservativo*.¹ Alternativamente, puesto que en este caso el trabajo realizado por la fuerza a lo largo de una trayectoria cerrada es nulo, véase la figura (1.2), se tiene:

$$\oint \vec{F} d\vec{s} = \int (\vec{\nabla} \times \vec{F}) d\vec{\sigma} = 0, \quad (1.10)$$

por el teorema de Stokes, y recordando que:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F} = -\vec{\nabla}V(\vec{r}). \quad (1.11)$$

Donde $V(\vec{r})$ es la energía potencial. Siempre podemos añadir a $V(\vec{r})$ una constante y la fuerza derivada de él, no cambia. Por lo tanto, el nivel de energía cero de $V(\vec{r})$ es arbitrario. De hecho cuando introdujimos la energía cinética también lo hicimos a partir de una diferencia entre energías cinéticas. Esto es:

$$W_{12} = T_2 - T_1 = - \int_1^2 \vec{\nabla}V d\vec{s} = V_1 - V_2. \quad (1.12)$$

Luego:

$$T_1 + V_2 = T_2 + V_1. \quad (1.13)$$

TEOREMA DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

Si las fuerzas que actúan sobre una partícula son conservativas, entonces la energía total $E = T + V$, se conserva (constante de movimiento).

Ahora bien si la fuerza aplicada sobre una partícula se deriva de un potencial dependiente además del tiempo, entonces el trabajo entre dos puntos:

$$W_{12} = - \int_1^2 \vec{\nabla}V d\vec{s}. \quad (1.14)$$

No es el cambio total del potencial $V(\vec{r}, t)$, entre los puntos 1 y 2, debido al intervalo de tiempo transcurrido. Por tanto, el trabajo no es la diferencia total de V . Así aunque podamos definir una energía total, $T + V$, ésta no se conserva.

¹Se habla de campo de fuerzas dado que se supone que en cada punto del espacio opera una fuerza dependiente de punto sobre la partícula.

1.2. Mecánica de un sistema de partículas

1.2.1. Momento lineal, fuerzas externas e internas

Es muy útil distinguir entre *fuerzas externas* al sistema de partículas, y que actúan sobre cada una de ellas, y *fuerzas internas* (p.e. la fuerza que la partícula i sufre debido a la presencia de todas las demás partículas del sistema). De esta forma¹:

$$\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i^{(e)} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} \quad (1.15)$$

donde \vec{F}_{ij} es la fuerza sobre la partícula i ejercida por la partícula j .

La posición centro de masas del sistema viene dada por:

$$\vec{R}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M} . \quad (1.16)$$

Entonces:

$$M \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \sum_i m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \sum_i \vec{F}_i^{(e)} + \sum_{\substack{i,j \\ j \neq i}} \vec{F}_{ij} , \quad (1.17)$$

siendo el último término una suma que se cancela a pares puesto que suponemos que se verifica la ley débil de acción y reacción $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$ (tercera ley de Newton en sentido débil). Luego:

$$M \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \sum_i \vec{F}_i^{(e)} \equiv \vec{F}^{(e)} . \quad (1.18)$$

El centro de masas se mueve, por tanto, sujeto a las fuerzas externas del sistema. Fijémonos además que,

$$\vec{P}_{cm} = M \frac{d\vec{R}}{dt} = \sum_i m_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\sum_j m_j \vec{r}_j}{\sum_j m_j} \right) = \sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_i \vec{p}_i = \vec{p}_{total} . \quad (1.19)$$

CONSERVACIÓN DEL MOMENTO LINEAL DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS

Si la fuerza externa total es cero, el momento lineal total del sistema se conserva.

¹Se sobreentiende, mientras no se explicita lo contrario, que las sumas se extienden sobre todas las partículas. De la misma forma, se explicitará cuando se realice el uso del convenio de suma de Einstein.

1.2.2. Momento angular

Analizamos el momento angular total del sistema de partículas. Éste viene dado por:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i . \quad (1.20)$$

Hallemos la variación respecto del tiempo:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(e)} + \sum_{\substack{i,j \\ j \neq i}} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} . \quad (1.21)$$

Considerando el último término como una suma de pares:

$$\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji} = (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} . \quad (1.22)$$

Si las fuerzas internas, además de cumplir la tercera ley de Newton en su sentido débil, tal y como hemos supuesto, cumplen que caen a lo largo del vector posición relativo, $\vec{r}_i - \vec{r}_j$, entonces, $(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} = 0$. Esta suposición es la tercera ley de Newton o ley de acción y reacción en sentido fuerte. Por lo tanto:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}^{(e)} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(e)} . \quad (1.23)$$

CONSERVACIÓN DEL MOMENTO ANGULAR TOTAL

\vec{L} es una constante de movimiento si el momento total de las fuerzas externas es cero (supone la ley de acción y reacción en su versión fuerte).

Cuando no se cumple la tercera ley de Newton y estamos hablando de sistemas de partículas aislados, sobre los que no actúan agentes externos al sistema, siempre es posible encontrar una generalización de \vec{p} y \vec{L} que sí que se conservan mediante el empleo del teorema de Noether, ver sección 2.5.

Es útil separar el momento angular en las contribuciones del momento angular del centro de masas y el relativo al centro de masas. Para ello, sea \vec{L} el momento angular del sistema respecto a un punto O :

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i .$$

Los vectores \vec{r}_i y \vec{v}_i los podemos expresar como,

$$\begin{aligned} \vec{r}_i &= \vec{r}'_i + \vec{R} \quad \text{con } \vec{r}'_i \text{ relativo al centro de masas,} \\ \vec{v}_i &= \vec{v}'_i + \vec{V} \quad \text{con } \vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt} \text{ y } \vec{v}'_i = \frac{d\vec{r}'_i}{dt} , \end{aligned} \quad (1.24)$$

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_i (\vec{r}'_i + \vec{R}) \times m_i (\vec{v}'_i + \vec{V}) = \\ &= \sum_i \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}'_i + \underbrace{\sum_i m_i \vec{r}'_i}_{\vec{R}'=0} \times \vec{V} + \vec{R} \times \underbrace{\sum_i m_i \vec{v}'_i}_{\vec{V}'=0} + \sum_i \vec{R} \times m_i \vec{V} . \end{aligned}$$

Luego:

$$\vec{L} = \underbrace{\vec{R} \times \vec{P}}_{\text{Momento del CM respecto a } O} + \underbrace{\sum_i \vec{r}'_i \times \vec{p}'_i}_{\text{Momento del movimiento alrededor del CM}} \quad (1.25)$$

1.2.3. Energía

Al igual que en el caso de una partícula, podemos analizar el trabajo para nuestro sistema de partículas:

$$\begin{aligned} W_{12} &= \sum_i \int_1^2 \vec{F}_i d\vec{s}_i = \sum_i \int_1^2 \vec{F}_i^{(e)} d\vec{s}_i + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \int_1^2 \vec{F}_{ij} d\vec{s}_i = \\ &= \sum_i \int_1^2 m_i \ddot{\vec{r}}_i \dot{\vec{r}}_i dt = \sum_i \int_1^2 \frac{m_i}{2} \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}}_i^2) dt = \\ &= \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right)_2 - \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right)_1 . \quad (1.26) \end{aligned}$$

Y definiendo la energía cinética del sistema como $T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$, tenemos:

$$W_{12} = T_2 - T_1 , \quad (1.27)$$

como en el caso de una sola partícula. Utilizando la descomposición de las coordenadas y velocidades dada en (1.24), tenemos:

$$\begin{aligned} T &= \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}'_i + \vec{V})^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (v_i'^2 + V^2 + 2\vec{v}'_i \vec{V}) = \\ &= \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2 + \underbrace{\vec{V} \sum_i m_i \vec{v}'_i}_{\substack{\text{Relativo al} \\ \text{propio CM,} \\ \vec{V}'=0}} . \end{aligned}$$

Luego:

$$T = \underbrace{\frac{1}{2} M V^2}_{\text{Mov. del CM}} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2}_{\text{Mov. relativo al CM}} . \quad (1.28)$$

Supongamos ahora que todas las fuerzas son derivables de un potencial:

$$\sum_i \int \vec{F}_i^{(e)} d\vec{s}_i = - \sum_i \int_1^2 \vec{\nabla}_i V d\vec{s}_i = - \left[\sum_i V_i \right]_1^2 \quad (1.29)$$

Además:

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{\nabla}_i V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = \vec{\nabla}_j V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = -\vec{F}_{ji} ,$$

por otra parte, también se cumple,

$$\frac{\partial |\vec{r}_{ij}|}{\partial \vec{r}_i} = \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{r_{ij}} \rightarrow \vec{\nabla}_{ij} V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = \frac{\partial V_{ij}}{\partial \vec{r}_{ij}} = \frac{\partial V_{ij}}{\partial r_{ij}} \hat{r}_{ij} = \vec{\nabla}_i V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) . \quad (1.30)$$

Así las fuerzas internas derivadas de un potencial $V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$ cumplen la tercera ley de acción y reacción en todas sus formas. Teniendo en cuenta que,

$$\begin{aligned} - \int_1^2 \left(\vec{\nabla}_i V_{ij} d\vec{s}_i + \vec{\nabla}_j V_{ji} d\vec{s}_j \right) &= - \int_1^2 \vec{\nabla}_i V_{ij} (d\vec{s}_i - d\vec{s}_j) = \\ &= - \int_1^2 \vec{\nabla}_i V_{ij} d\vec{r}_{ij} = - \int_1^2 \vec{\nabla}_{ij} V_{ij} d\vec{r}_{ij} . \end{aligned} \quad (1.31)$$

Luego el trabajo realizado por las fuerzas internas vendrá dado por:

$$\sum_{\substack{i,j \\ j \neq i}} \int_1^2 \vec{F}_{ij} d\vec{s}_i = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ j \neq i}} \int_1^2 \vec{\nabla}_{ij} V_{ij} d\vec{r}_{ij} . \quad (1.32)$$

El factor 1/2 proviene de sumar (1.31) sobre i y sobre j , con lo que cada par se suma dos veces. El trabajo total, W_{12} , será:

$$W_{12} = \left(- \sum_i V_i - \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} V_{ij} \right) . \quad (1.33)$$

Y además definimos

$$V = \sum_i V_i + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} V_{ij} , \quad (1.34)$$

como la energía potencial total. El segundo sumando representa la *energía potencial interna*. Por lo tanto, de (1.27) y (1.33) tenemos:

$$W_{12} = T_2 - T_1 = V(1) - V(2) \Rightarrow T_1 + V(1) = T_2 + V(2) = E . \quad (1.35)$$

CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA TOTAL

Si las fuerzas son conservativas, tenemos conservación de la Energía total.

Hemos definido la energía potencial interna como:

$$\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} V_{ij} . \quad (1.36)$$

En el sólido rígido, tenemos $|\vec{r}_{ij}| = \text{constante}$, y, por tanto, los $d\vec{r}_{ij}$ son perpendiculares a los \vec{r}_{ij} , luego serán perpendiculares a las fuerzas \vec{F}_{ij} . Así las fuerzas internas no hacen trabajo, por lo que la energía potencial interna se mantiene constante. En general, las fuerzas internas sí realizan trabajo.

1.3. Ligaduras

Desde un punto de vista macroscópico existen ligaduras que restringen los valores posibles de las coordenadas de las partículas del sistema o las relaciones entre ellas. Así, además de tener en cuenta las ecuaciones de Newton:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^{(e)} + \sum_{\substack{j \\ j \neq i}} \vec{F}_{ij} , \quad (1.37)$$

hay que tener en cuenta las ligaduras.

Éstas se suelen clasificar en:

1. **Holonómicas:** $f_I(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) = 0$, $I = 1, 2, \dots, K$. Es decir, las ligaduras se pueden expresar como $K \leq 3N$ ecuaciones que sólo involucran el tiempo y las coordenadas de las partículas.

Ejemplo: $(\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2 - c_{ij}^2 = 0$, sólido rígido.

2. **No holonómicas :** El resto.

Ejemplo: $r^2 - a^2 \geq 0$, movimiento sobre o fuera de una esfera.

Un subgrupo a considerar es el de las ligaduras *semiholonómicas*, que son relaciones del tipo:

$$f_I(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N; \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, \dots, \dot{\vec{r}}_N, t) = 0 , I = 1, 2, \dots, K .$$

Menos importante es la clasificación de si las ligaduras dependen del tiempo. Si dependen del tiempo hablamos de ligaduras reónomas y si no dependen del tiempo de ligaduras esclerónomas. Aquí trataremos las ligaduras holonómicas y cuando introduzcamos el principio de Hamilton trataremos también las semiholonómicas.

Coordenadas generalizadas. Son un conjunto cualesquiera de magnitudes que definen la posición de un sistema. Sus derivadas respecto del tiempo se llaman *velocidades generalizadas*.

El estado de un sistema viene determinado por el conocimiento de las coordenadas generalizadas y de sus velocidades generalizadas. Conociendo éstas y mediante las ecuaciones de movimiento, junto con las ligaduras, se fija la evolución temporal.

El número mínimo necesario de magnitudes que fijan unívocamente la posición de un sistema es el *número de grados de libertad*.

Cuando hay ligaduras no holonómicas el número de grados de libertad del movimiento finito suele ser mayor que el número de grados de libertad del movimiento infinitesimal. Pensemos por ejemplo en las ligaduras semiholonómicas, en ellas el movimiento infinitesimal viene restringido directamente por las ecuaciones que definen las ligaduras y estas serán no integrables. Si fuesen integrables las ligaduras pasarían a ser puramente holonómicas.

El problema de la presencia de *ligaduras holonómicas* se soluciona mediante una adecuada elección de coordenadas generalizadas de forma que las ligaduras se satisfagan automáticamente.

Matemáticamente, designando por q_α las coordenadas generalizadas, tenemos:

$$\begin{aligned} q_\alpha &= q_\alpha(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t), \quad \alpha = 1, \dots, 3N, \\ \vec{r}_i &= \vec{r}_i(q_1, \dots, q_{3N}, t), \quad i = 1, \dots, N, \\ \det \left| \frac{\partial q_\alpha}{\partial \vec{r}_i} \right| &\neq 0. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Con las K ligaduras independientes:

$$f_I(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0, \quad I = 1, \dots, K. \quad (1.39)$$

Tenemos:

$$\begin{aligned} n &= 3N - K, \quad q_{n+I} = q_{n+I}(f_1, \dots, f_K), \\ \det \left| \frac{\partial q_{n+I}}{\partial f_I} \right| &\neq 0. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Al cumplirse las ligaduras:

$$q_{n+I} = q_{n+I}(\overbrace{0, 0, \dots, 0}^K) = \text{constante de movimiento}. \quad (1.41)$$

“Sólo” hemos de determinar la evolución temporal de las n coordenadas generalizadas q_1, \dots, q_n . En lo que sigue supondremos que éste es el caso, y que nuestras coordenadas generalizadas son q_α , con $\alpha = 1, \dots, n$.

En física microscópica las fuerzas son elementales y se pretende conocerlas ¡todas!. Así que el concepto de ligadura no suele jugar un papel importante y, cuando al no conocerse todas las fuerzas o para simplificar los cálculos en física microscópica se introducen ligaduras, en la mayoría de los casos se trata de ligaduras holonómicas. Téngase en cuenta que las ligaduras, en última instancia, representan fuerzas a priori desconocidas y sólo después de resolver el problema se pueden determinar.

1.4. El principio de D'Alembert y las ecuaciones de Lagrange

Desplazamiento virtual infinitesimal: $\delta\vec{r}_i$, $i = 1, \dots, N$. Se define como el cambio en la configuración del sistema debido a desplazamientos infinitesimales de las coordenadas, $\delta\vec{r}_i$, consistentes con las fuerzas y ligaduras del sistema *en un instante dado* t . Es decir, el tiempo permanece fijado en estos desplazamientos *virtuales*.

Los desplazamientos reales, los denotamos por $d\vec{r}_i$ y no son instantáneos, sino que ocurren en un tiempo dt , durante el cual todo evoluciona.

Sistema en equilibrio estático: $\vec{F}_i = 0$. Por tanto:

$$\sum_i \vec{F}_i \delta\vec{r}_i = 0. \quad (1.42)$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_i &= \vec{F}_i^{(a)} + \vec{f}_i, & \vec{F}_i^{(a)} & \text{ fuerza conocida, aplicada,} \\ & & \vec{f}_i & \text{ fuerza debida a la ligadura,} \end{aligned} \quad (1.43)$$

$$\sum_i \vec{F}_i^{(a)} \delta\vec{r}_i + \sum_i \vec{f}_i \delta\vec{r}_i = 0. \quad (1.44)$$

Ahora realizamos la *suposición fundamental*:

$$\sum_i \vec{f}_i \delta\vec{r}_i = 0. \quad (1.45)$$

Esto sucede cuando $\vec{f}_i = \sum_I \lambda_I(t) \vec{\nabla}_i f_I$ (las fuerzas de ligadura son perpendiculares a la superficie donde queda restringido el movimiento de la partícula dentro del espacio \mathbb{R}^{3N} , p.e. en el sólido rígido), ya que,

$$\sum_i \vec{f}_i \delta\vec{r}_i = \sum_{i,I} \lambda_I(t) \vec{\nabla}_i f_I \delta\vec{r}_i = \sum_{i,I} \lambda_I(t) \delta_i f_I = 0. \quad (1.46)$$

No sucede así cuando tenemos rozamiento de desplazamiento (fenómeno macroscópico) pero sí que es cierto en el caso de rozamiento por rodadura dado que instantáneamente el punto de contacto con la superficie está en reposo, por tanto $\delta\vec{r} = 0$ para ese punto, y el trabajo es pues nulo.² Además el trabajo sobre los desplazamientos virtuales de la fuerza normal a una superficie que varía con el tiempo

²En problemas propios de estática las fuerzas aplicadas incluyen todas las fuerzas ejercidas sobre el sistema debidas a agentes externos, esto es, además de fuerzas conocidas o fundamentales, tanto interiores como exteriores al sistema, incluyen las fuerzas normales a superficies y los rozamientos (tangenciales a dichas superficies). Las \vec{f}_i representan entonces fuerzas interiores del sistema no conocidas, típicamente se trata de las fuerzas que mantienen cohesionado a un sistema no deformable, que como sabemos no realizan trabajo en un desplazamiento virtual del sistema.

es cero (ya que instantáneamente la fuerza es perpendicular a la superficie), pero no sería nulo el trabajo en un desplazamiento real. Veámoslo. Sea la superficie descrita por $g(\vec{x}, t) = 0$, y $\vec{F} = \alpha \frac{\partial g}{\partial \vec{x}}$, tenemos:

$$\begin{aligned} W &= \int \vec{F} d\vec{x} = \int \alpha \frac{\partial g}{\partial \vec{x}} d\vec{x} = - \int \frac{\partial g}{\partial t} dt, \text{ puesto que,} \\ dg &= \frac{\partial g}{\partial \vec{x}} d\vec{x} + \frac{\partial g}{\partial t} dt = 0, \\ \frac{\partial g}{\partial \vec{x}} d\vec{x} &= - \frac{\partial g}{\partial t} dt. \end{aligned} \quad (1.47)$$

En definitiva, de (1.44) y (1.45), tenemos que la condición de equilibrio es:

$$\sum_i \vec{F}_i^{(a)} \delta \vec{r}_i = 0 \longrightarrow \text{Principio de los trabajos virtuales.} \quad (1.48)$$

Dado que las $\delta \vec{r}_i$ están relacionadas por las ligaduras no podemos igualar sin más $\vec{F}_i^{(a)} = 0$!. Hay que hacer uso de las coordenadas generalizadas, que como estamos en el caso holonómico están libres de ligaduras y son independientes.

También queremos ir más allá e incluir dinámica, o sea, evolución temporal. Teniendo en cuenta la segunda ley de Newton,

$$\begin{aligned} \vec{F}_i &= \dot{\vec{p}}_i \Rightarrow \vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i = 0 \\ \sum_i (\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i) \delta \vec{r}_i &= \sum_i (\vec{F}_i^{(a)} - \dot{\vec{p}}_i) \delta \vec{r}_i + \sum_i \vec{f}_i \delta \vec{r}_i = 0 \end{aligned} \quad (1.49)$$

El último sumando es nulo por hipótesis. Esto nos lleva a:

$$\sum_i (\vec{F}_i^{(a)} - \dot{\vec{p}}_i) \delta \vec{r}_i = 0 \longrightarrow \text{Principio de D'Alembert.} \quad (1.50)$$

Es importante recalcar sobre la expresión anterior que,

1. No aparecen las fuerzas de ligadura.
2. Tenemos una ecuación dinámica.

Empleando coordenadas generalizadas, obtenemos que:

$$\sum_i \vec{F}_i^{(a)} \delta \vec{r}_i = \sum_\alpha \sum_i \vec{F}_i^{(a)} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha = \sum_\alpha \delta q_\alpha Q_\alpha.$$

Donde:

$$Q_\alpha = \sum_i \vec{F}_i^{(a)} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}, \quad (1.51)$$

es la fuerza generalizada. Como δq_α no tendrá, en general, dimensiones de longitud, tampoco Q_α , tendrá dimensiones de fuerza en general y puede ser, por ejemplo, un torque asociado a un ángulo.

Por otra parte,

$$\sum_i \dot{p}_i \delta \vec{r}_i = \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \delta \vec{r}_i = \sum_{i,\alpha} m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha . \quad (1.52)$$

Analicemos la suma en i :

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = \sum_i \left[\frac{d}{dt} \left(m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) - m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \right] . \quad (1.53)$$

Observemos que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} &= \sum_\beta \left(\dot{q}_\beta \frac{\partial}{\partial q_\beta} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = \\ &= \sum_\beta \left(\dot{q}_\beta \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_\beta \partial q_\alpha} \right) + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_\alpha \partial t} = \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \left(\sum_\beta \dot{q}_\beta \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\beta} + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_\alpha} , \end{aligned} \quad (1.54)$$

$$\vec{v}_i = \sum_\beta \dot{q}_\beta \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\beta} + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_\beta} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\beta} . \quad (1.55)$$

Combinando (1.54) y (1.55) en (1.53), tenemos:

$$\begin{aligned} \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} &= \sum_i \left[\frac{d}{dt} \left(m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) - m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_\alpha} \right] = \\ &= \sum_i \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} \left(\frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \left(\frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \right) \right] . \end{aligned} \quad (1.56)$$

Llevando los anteriores resultados a (1.50) tenemos:

$$\sum_\alpha \delta q_\alpha \left[\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \right) - Q_\alpha \right] = 0 . \quad (1.57)$$

Y dado que los δq_α son arbitrarios:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha . \quad (1.58)$$

Que son n ecuaciones de segundo orden y, por lo tanto, tenemos $2n$ constantes de integración. Necesitamos conocer, por ejemplo, $q_\alpha(0)$ y $\dot{q}_\alpha(0)$.

Si las fuerzas se derivan de un potencial, (aún cuando sea dependiente del tiempo),

$$\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) . \quad (1.59)$$

Tenemos que:

$$Q_\alpha = \sum_i \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = - \sum_i \vec{\nabla}_i V \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = - \frac{\partial V}{\partial q_\alpha} . \quad (1.60)$$

Luego, a partir de (1.58) se llega a que,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = - \frac{\partial V}{\partial q_\alpha} . \quad (1.61)$$

Dado que V no depende de las velocidades generalizadas (lo hemos supuesto):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_\alpha} = 0 , \quad L = T - V , \quad (1.62)$$

donde L es el Lagrangiano del sistema y verifica:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0} \quad (1.63)$$

que son las ecuaciones de Lagrange.

El Lagrangiano no es único. Así $L' = L + \frac{dF(q, t)}{dt}$, nos permite obtener las mismas ecuaciones de movimiento que L :

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \sum_\beta \frac{\partial F}{\partial q_\beta} \dot{q}_\beta + \frac{\partial F}{\partial t} , \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} \frac{dF}{dt} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial q_\alpha} = \sum_\beta \frac{\partial^2 F}{\partial q_\beta \partial q_\alpha} \dot{q}_\beta + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q_\alpha} , \\ \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \frac{dF}{dt} &= \sum_\beta \frac{\partial^2 F}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \dot{q}_\beta + \frac{\partial^2 F}{\partial q_\alpha \partial t} \end{aligned}$$

Así:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} \frac{dF}{dt} - \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \frac{dF}{dt} = 0 .$$

En un ejercicio de clase veremos que es también condición necesaria para obtener las mismas ecuaciones. Hagámoslo aquí para una sola variable.

Consideremos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} &= \Lambda(\ddot{q}, \dot{q}, q, t) , \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L'}{\partial q} &= \Lambda'(\ddot{q}, \dot{q}, q, t) . \end{aligned}$$

Como las ecuaciones de movimiento son las mismas, tenemos que:

$$\Lambda = \Lambda' \rightarrow \Lambda - \Lambda' = 0$$

Por tanto:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \overbrace{(L - L')}^{\psi}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \overbrace{(L - L')}^{\psi}}{\partial q} = 0 ,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \psi}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \psi}{\partial q} = 0, \quad \psi = \psi(\dot{q}, q, t) , \quad (1.64)$$

desarrollando,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \dot{q}^2} \ddot{q} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \dot{q} \partial q} \dot{q} + \frac{\partial \psi}{\partial \dot{q} \partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial q} = 0$$

Esto es válido como relación funcional para cualesquiera \ddot{q} , \dot{q} , q , y como $\psi = \psi(\dot{q}, q, t)$, no depende de \ddot{q} , entonces:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \dot{q}^2} = 0 ,$$

$$\psi = \dot{q}F(q, t) + G(q, t) .$$

Introduciendo ψ en (1.64), tenemos:

$$\dot{q} \frac{\partial F}{\partial q} + \frac{\partial F}{\partial t} - \dot{q} \frac{\partial F}{\partial q} - \frac{\partial G}{\partial q} = 0 ,$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial G}{\partial q} = 0 ,$$

$$F = \frac{\partial \Phi(q, t)}{\partial q} , G = \frac{\partial \Phi(q, t)}{\partial t} ,$$

$$\psi = \dot{q} \frac{\partial \Phi}{\partial q} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{d\Phi}{dt} .$$

Es útil, para análisis posteriores, expresar la energía cinética del sistema en coordenadas generaliza-

das. Para ello:

$$\begin{aligned}
T &= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\sum_\alpha \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)^2 = \\
&= \sum_i \frac{1}{2} m_i \left[\sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta + \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)^2 + 2 \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \sum_\alpha \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha \right] = \\
&= \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)^2 + \sum_i m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \sum_\alpha \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{1}{2} \sum_i m_i \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta = \\
&= M_0 + \sum_\alpha M_\alpha \dot{q}_\alpha + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} M_{\alpha\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta .
\end{aligned} \tag{1.65}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
M_0 &= \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)^2 , \\
M_\alpha &= \sum_i m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} , \\
M_{\alpha\beta} &= \sum_i m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\beta} .
\end{aligned} \tag{1.66}$$

Si la transformación de cartesianas a coordenadas generalizadas no depende explícitamente del tiempo, entonces $M_0 = 0$ y $M_\alpha = 0$. Por lo tanto,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} M_{\alpha\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta \tag{1.67}$$

1.5. Potenciales electromagnéticos y función de disipación de Rayleigh

1.5.1. Potenciales electromagnéticos

Habíamos obtenido (1.58),

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha .$$

Si tomamos:

$$Q_\alpha = -\frac{\partial U}{\partial q_\alpha} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) , \tag{1.68}$$

podemos definir el Lagrangiano $L = T - U$, donde U es un potencial generalizado dependiente de la velocidad. Por ejemplo, en electromagnetismo, tenemos la fuerza de Lorentz:

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right), \quad (1.69)$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (1.70)$$

Veamos que la fuerza de Lorentz se puede obtener del potencial generalizado:

$$U = q(\phi - \vec{A}\vec{v}), \quad (1.71)$$

que da lugar al Lagrangiano,

$$L = T - U = \frac{1}{2}mv^2 - q\phi + q\vec{A}\vec{v}.$$

Tomemos la coordenada x , análogamente se realiza para el resto de coordenadas cartesianas,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m\dot{x} + qA_x, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m\ddot{x} + q \frac{\partial A_x}{\partial x} \dot{x} + q \frac{\partial A_x}{\partial y} \dot{y} + q \frac{\partial A_x}{\partial z} \dot{z} + q \frac{\partial A_x}{\partial t}, \\ \frac{\partial L}{\partial x} &= -q \frac{\partial \phi}{\partial x} + q \frac{\partial A_x}{\partial x} \dot{x} + q \frac{\partial A_y}{\partial x} \dot{y} + q \frac{\partial A_z}{\partial x} \dot{z}. \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -q \frac{\partial A_x}{\partial x} \dot{x} - q \frac{\partial A_x}{\partial y} \dot{y} - q \frac{\partial A_x}{\partial z} \dot{z} - q \frac{\partial A_x}{\partial t} \\ &\quad - q \frac{\partial \phi}{\partial x} + q \frac{\partial A_x}{\partial x} \dot{x} + q \frac{\partial A_y}{\partial x} \dot{y} + q \frac{\partial A_z}{\partial x} \dot{z} \\ &= qE_x - q \frac{\partial A_x}{\partial y} \dot{y} - q \frac{\partial A_x}{\partial z} \dot{z} + q \frac{\partial A_y}{\partial x} \dot{y} + q \frac{\partial A_z}{\partial x} \dot{z} \\ &= qE_x + q\dot{y} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) + q\dot{z} \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que,

$$\left(\vec{v} \times \vec{B} \right)_x = \dot{y}B_z - \dot{z}B_y = \dot{y} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - \dot{z} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right).$$

Por lo tanto,

$$m\ddot{x} = qE_x + q \left(\vec{v} \times \vec{B} \right)_x = q \left(E_x + \left(\vec{v} \times \vec{B} \right)_x \right),$$

en acuerdo con la fuerza de Lorentz.

1.5.2. Función de disipación de Rayleigh

En general podemos escribir las ecuaciones de Lagrange como:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha , \quad (1.72)$$

donde Q_α representa las fuerzas que no se pueden obtener de un potencial. Por ejemplo, fuerzas disipativas o de rozamiento (fenómeno macroscópico). En muchas ocasiones estas fuerzas son proporcionales a la velocidad de la partícula:

$$F_{fx} = -k_x v_x . \quad (1.73)$$

Se pueden obtener de:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \sum_i (k_x v_{ix}^2 + k_y v_{iy}^2 + k_z v_{iz}^2) . \quad (1.74)$$

Que es la llamada *función de disipación de Rayleigh*. Los coeficientes k_x , k_y y k_z son en general de posición y tiempo, esto es, $k_x(\vec{r}, t)$, $k_y(\vec{r}, t)$ y $k_z(\vec{r}, t)$. Es directo comprobar que,

$$F_{f,ix} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v_{ix}} , \quad (1.75)$$

$$Q_\alpha = \sum_i \vec{F}_{f,i} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = -\sum_i \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \vec{v}_i} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = -\sum_i \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \vec{v}_i} \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_\alpha} . \quad (1.76)$$

Por lo que las ecuaciones de Lagrange quedan en la forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_\alpha} = 0 . \quad (1.77)$$

Capítulo 2

Simetrías y Teoremas de Conservación I. Mecánica Lagrangiana

2.1. Principio de Hamilton

Sea un sistema de coordenadas generalizadas q_1, q_2, \dots, q_n (suponemos, si las hubiere, ligaduras holonómicas). Cada punto de coordenadas (q_1, \dots, q_n) fija la posición del sistema unívocamente en un espacio de n -dimensiones que llamamos *espacio de configuración* o q -espacio.

El *Principio de Hamilton* afirma que todo sistema viene caracterizado por una función de estado

$$L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t) ,$$

el Lagrangiano del sistema (más brevemente, $L(q, \dot{q}, t)$), tal que el movimiento del sistema cumple:

- En $t = t_1, t = t_2$, ocupa posiciones dadas $q^{(1)}, q^{(2)}$, respectivamente.
- El sistema se mueve tal que el funcional,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt , \tag{2.1}$$

que llamamos acción, es un extremo para la trayectoria real del sistema, ver figura 2.1.

Por otra parte, L no contiene derivadas superiores a la primera ya que el estado del sistema viene definido por q y \dot{q} .

Sea $\delta q(t)$ la variación del camino infinitesimal respecto a la trayectoria real del sistema, tal que

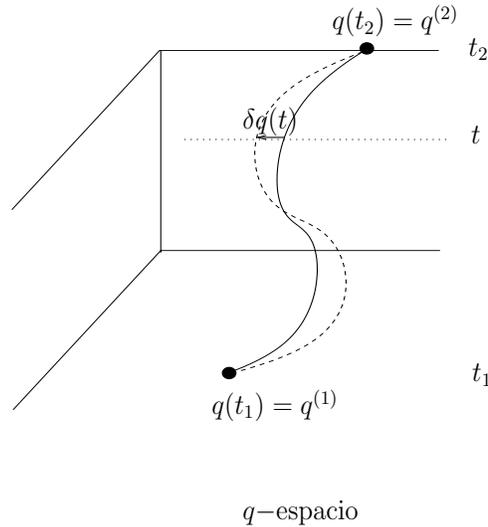


Figura 2.1: La trayectoria real de sistema se indica mediante la línea continua. La línea discontinua indica una trayectoria próxima a la anterior.

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0,$$

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} \delta q_{\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \delta \dot{q}_{\alpha} \right\} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} \delta q_{\alpha} + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \frac{d}{dt} \delta q_{\alpha}}_{\text{integración por partes}} \right\} dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} \delta q_{\alpha} dt + \left[\sum_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \delta q_{\alpha} \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \delta q_{\alpha} dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha} \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} \right\} \delta q_{\alpha} dt = 0 . \end{aligned}$$

En la expresión anterior hemos tenido en cuenta que $d\delta q_{\alpha}(t)/dt = \delta \dot{q}_{\alpha}$. Dado que los $\delta q_{\alpha}(t)$ son arbitrarios (ligaduras holonómicas),

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} = 0}$$

Que son las ecuaciones de Lagrange. Como vemos, relaciona aceleraciones, velocidades y coordenadas. Son ecuaciones de movimiento.

Estas ecuaciones son de segundo orden y necesitamos $2n$ constantes arbitrarias, que pueden determinarse conociendo, por ejemplo, los valores iniciales de las coordenadas y sus derivadas.

Si tenemos dos sistemas A y B , aislados, no interactuantes, no hay relación entre las coordenadas generalizadas de ambos sistemas. Con lo cual podemos tomar como Lagrangiano del sistema global,

$$L = L_A + L_B , \quad (2.2)$$

que es la propiedad aditiva del Lagrangiano. Al no interactuar entre sí los dos sistemas,

$$\frac{\partial L_{A(B)}}{\partial q_{B(A)}} = \frac{\partial L_{A(B)}}{\partial \dot{q}_{B(A)}} = 0 ,$$

de este modo se recuperan las ecuaciones de Lagrange para cada sistema independientemente. A la propiedad aditiva del Lagrangiano se le puede conferir un significado físico sin más que admitiendo que dado un sistema cerrado compuesto de dos subsistemas A y B que se alejan, en el límite de separación infinita las interacciones mutuas desaparecen y el Lagrangiano del sistema global ha de tender a (2.2),

$$\lim L = L_A + L_B , \quad (2.3)$$

fijando a cero en este límite a la posible derivada total respecto del tiempo que se puede añadir a (2.2).

El Lagrangiano de un sistema está indeterminado por la adición de la derivada total respecto al tiempo de una función de punto $f(q, t)$:

$$L'(\dot{q}, q, t) = L(\dot{q}, q, t) + \frac{df(q, t)}{dt} .$$

Los Lagrangianos L' y L , conducen a las mismas ecuaciones de movimiento. A partir de la acción:

$$\begin{aligned} S' &= \int_{t_1}^{t_2} dt L'(\dot{q}, q, t) = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\dot{q}, q, t) + \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{df(q, t)}{dt} \\ &= S + f(q^{(2)}, t_2) - f(q^{(1)}, t_1) . \end{aligned}$$

Si $\delta S = 0 \Rightarrow \delta S' = 0$ para la misma trayectoria extremal.

2.2. Principio de Relatividad de Galileo

Un *sistema de referencia inercial* es aquel en el que una partícula libre (que no interactúe con ningún otro sistema, y que esté infinitamente lejana de cualquier otra partícula) mantiene un movimiento libre uniforme.

Dado un sistema de referencia inercial, hay infinitos sistemas de referencia inerciales que se mueven a velocidad relativa \vec{V} entre sí (en ellos se sigue cumpliendo la ley de inercia).

Una *transformación de Galileo*, viene dada por las expresiones,

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= \vec{r} + \vec{V}t , \\ t' &= t . \end{aligned} \quad (2.4)$$

El principio de relatividad de Galileo afirma que las leyes de la mecánica son invariantes bajo una transformación de Galileo. Es decir, debemos obtener las mismas ecuaciones de movimiento, como relaciones funcionales entre coordenadas, velocidades y aceleraciones, utilizando tanto $L(\vec{v}, \vec{r}, t)$ como $L(\vec{v}', \vec{r}', t)$, donde el segundo Lagrangiano se obtiene sustituyendo en L directamente las variables originales por las transformadas.¹ Por lo tanto, $L(\vec{v}, \vec{r}, t)$ y $L(\vec{v}'(\vec{v}), \vec{r}'(\vec{r}), t)$ difieren como mucho en una derivada total respecto del tiempo de una función de punto. Como consecuencia, si $\vec{r}(t)$ es una solución de las ecuaciones de movimiento entonces $\vec{r}'(t) = \vec{r}(t) + \vec{V}t$ es una nueva solución de las ecuaciones de movimiento.

En los sistemas de referencia inerciales el espacio es homogéneo (no depende de punto) e isótropo (todas las direcciones son equivalentes). Además, el tiempo es homogéneo. Si eso no fuese así, una partícula no mantendría su estado de movimiento estacionario, y por lo demás arbitrario, de forma indefinida.

2.3. Lagrangiano de una partícula libre

En un sistema de referencia inercial, L no puede depender de punto (\vec{r}) ni de t . Tampoco puede depender de \vec{v} , ya que el espacio es isótropo (p.e. términos como $\vec{v} \cdot \vec{n}$, con \vec{n} dado, quedan excluidos ya que no hay tal \vec{n} , no hay direcciones privilegiadas). Por tanto, $L = L(v^2)$. Hagamos una transformación de Galileo infinitesimal:

$$\begin{aligned}\vec{r}' &= \vec{r} + \vec{\epsilon}t, \\ t' &= t.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L(v'^2) &= L(v^2 + 2\vec{\epsilon}\vec{v} + \epsilon^2) = \\ &= L(v^2) + \frac{\partial L}{\partial v^2} 2\vec{v}\vec{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^2) = \\ &= L(v^2) + \frac{dF}{dt}.\end{aligned}$$

Así tenemos,

$$\frac{\partial L}{\partial v^2} 2\vec{v}\vec{\epsilon} = \frac{dF(\vec{r}, t)}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \vec{r}} \dot{\vec{r}} + \frac{\partial F}{\partial t}.$$

Dado que \vec{v} es arbitraria y $\partial F/\partial t$ es independiente de \vec{v} , se sigue que,

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial v^2} 2\vec{\epsilon} - \frac{\partial F}{\partial \vec{r}} &= 0, \\ \frac{\partial F(\vec{r}, t)}{\partial t} &= 0,\end{aligned}\tag{2.5}$$

¹En un sistema cerrado, dada una transformación genérica de las coordenadas $q'_\alpha = q'_\alpha(q_\beta, t)$, el Lagrangiano en las nuevas coordenadas viene dado por $L'(\dot{q}', q', t) = L(\dot{q}(\dot{q}', q', t), q(q', t), t)$, puesto que L es un escalar. Dicha transformación será una simetría si $L'(\dot{q}', q', t) = L(\dot{q}', q', t) + \frac{df(q', t)}{dt}$. Es decir, el Lagrangiano transformado es el Lagrangiano original sustituyendo directamente las variables originales por las nuevas coordenadas, salvo, posiblemente, la adición de una derivada total respecto del tiempo de una función de punto.

y no hay dependencia temporal explícita, así que $F = F(\vec{r})$. Tomemos $\vec{\epsilon} = (\epsilon_x, 0, 0)$,

$$\frac{\partial L}{\partial v^2} 2v_x \epsilon_x = \frac{\partial F}{\partial x} v_x + \frac{\partial F}{\partial y} v_y + \frac{\partial F}{\partial z} v_z .$$

Como en la última ecuación el término de la derecha sólo depende de posiciones y el de la izquierda sólo depende de velocidad, se sigue que:

$$\frac{\partial L(v^2)}{\partial v^2} = a = \text{constante.}$$

Luego:

$$\boxed{L = av^2}$$

Obtenemos por tanto la ley de inercia:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} &= \frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = 0 , \\ 2a\dot{\vec{v}} &= 0 \Rightarrow \vec{v} = \overrightarrow{\text{const.}} \end{aligned}$$

Comprobamos a continuación la invariancia de las ecuaciones de movimiento bajo una transformación de Galileo finita (tengamos en cuenta que una transformación de Galileo finita se puede obtener a partir de la aplicación sucesiva de transformaciones de Galileo infinitesimales):

$$\begin{aligned} L(v'^2) &= av'^2 = a(\vec{v} + \vec{V})^2 = av^2 + aV^2 + 2a\vec{v}\vec{V} \\ &= av^2 + \frac{d}{dt}(aV^2t) + 2a\frac{d}{dt}(\vec{r}\vec{V}) \\ &= av^2 + \frac{d}{dt}(aV^2t + 2a\vec{r}\vec{V}) . \end{aligned} \quad (2.6)$$

Haciendo $a = m/2$, tenemos que $L = \frac{1}{2}mv^2$ (m es la masa de la partícula). Si se impone que la acción a lo largo de la trayectoria real no sólo corresponda con un extremo sino que sea mínima, se llega a que m debe ser positiva puesto que v^2 es positivo.²

El Lagrangiano para un sistema de partículas no interactuantes, en virtud de la aditividad de los Lagrangianos, lo podemos tomar como:

$$\sum_a \frac{1}{2} m_a v_a^2 . \quad (2.7)$$

Es de destacar que dado que las ecuaciones de movimiento quedan invariantes si se multiplica el Lagrangiano por una constante arbitraria no nula, el concepto de masa sólo adquiere significado real a partir de la propiedad aditiva del Lagrangiano (2.3). Así, los cocientes entre las masas presentes en (2.7), que tienen significado físico independientemente de la unidad de masa adoptada, quedan invariantes bajo la transformación anterior.

²Si m fuese negativa no habría mínimo.

2.4. Lagrangiano de un sistema de partículas

Consideremos primero un *sistema cerrado*, donde las partículas interactúan entre sí pero no con otras ajenas al sistema. No hay dependencia temporal explícita y describimos las interacciones entre las partículas añadiendo una cierta función de las coordenadas al Lagrangiano libre (2.7),

$$L = \underbrace{\sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2}_{\text{Energía cinética}} - \underbrace{V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)}_{\text{Energía potencial}}. \quad (2.8)$$

El que V sólo depende de punto hace que cualquier variación en una de las coordenadas repercuta en el movimiento del resto de las partículas instantáneamente. Es decir, hay una propagación instantánea de las interacciones. De hecho, si éstas se propagasen a velocidad finita dependería del sistema de referencia inercial en contra del principio de Galileo. Notemos que para que el Lagrangiano anterior sea invariante bajo una transformación de Galileo se requiere que V sea función de las posiciones relativas entre las partículas, $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$ con $i, j = 1, \dots, N$.

El Lagrangiano anterior vemos que también es invariante por los cambios: $t \rightarrow t + t'$ y $t \rightarrow -t$ (reversibilidad de los movimientos de un sistema cerrado en mecánica clásica).

Las leyes de Newton se obtienen a partir del Lagrangiano anterior:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} &= 0, \\ m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} &= - \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} = \vec{F}_i. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Por otra parte, si la transformación de coordenadas cartesianas a generalizadas no depende explícitamente del tiempo, sabemos a partir de (1.65) que:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} M_{\alpha\beta}(q) \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta - V(q). \quad (2.10)$$

Cuando una partícula interactúa con un campo externo, V depende del tiempo. Consideremos ahora un sistema A no cerrado, en interacción con otro sistema B , que realiza en el tiempo un movimiento conocido $q_B(t)$. A partir de (2.2) tenemos que:

$$\begin{aligned} L &= T_A(q_A, \dot{q}_A) + T_B(q_B(t), \dot{q}(t)_B) - U(q_A, q_B(t)) \\ L_A &= T_A(q_A, \dot{q}_A) - U(q_A, q_B(t)) \end{aligned}$$

Ya que $T_B(q_B(t), \dot{q}_B(t))$ es una función conocida de tiempo que se puede poner como la derivada total de su integral. Esto no ocurre para la energía potencial debido a su dependencia en q_A .

2.5. Teorema de Noether

Sea la transformación en el espacio de configuración:

$$q_\alpha \longrightarrow q'_\alpha = (h(\epsilon_i)q)_\alpha. \quad (2.11)$$

Donde $h(\epsilon_i)$ es un operador $M \xrightarrow{h} M$ (M espacio de configuración), que depende continuamente de p parámetros $\epsilon_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, p$. Decimos que h es una simetría si deja invariante las ecuaciones de movimiento. Consideramos a continuación transformaciones infinitesimales, y mantenemos hasta primer orden en los parámetros $\epsilon_i \equiv d\epsilon_i$. Tomamos el convenio de que para $\epsilon_i = 0$ la transformación es la identidad y designamos por $\delta L = L(q', \dot{q}', t) - L(q, \dot{q}, t)$.

Casos:

1. $\delta L = 0$.

$$\begin{aligned} (h(\epsilon_i)q)_\alpha &= q_\alpha + \overbrace{\sum_i \left(\frac{\partial h}{\partial \epsilon_i} q \right)_\alpha}^{\delta q_\alpha} d\epsilon_i. \\ \delta L &= \sum_{\alpha, i} \left[\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \left(\frac{\partial h}{\partial \epsilon_i} q \right)_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \left(\frac{\partial h}{\partial \epsilon_i} \dot{q} \right)_\alpha \right] d\epsilon_i \\ &= \sum_{\alpha, i} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \left(\frac{\partial h}{\partial \epsilon_i} q \right)_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial h}{\partial \epsilon_i} q \right)_\alpha \right] d\epsilon_i \\ &= \sum_{\alpha, i} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \left(\frac{\partial h}{\partial \epsilon_i} q \right)_\alpha \right] d\epsilon_i = 0. \end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \left(\frac{\partial h}{\partial \epsilon_i} q \right)_\alpha = \text{cte. de movimiento}} \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (2.12)$$

2. $\delta L = \frac{d\delta F}{dt}$, $\delta F = F_i d\epsilon_i$.

Es claro, por el anterior desarrollo, que:

$$\delta L = \frac{d\delta F}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left[\sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \left(\frac{\partial h}{\partial \epsilon_i} q \right)_\alpha \right] d\epsilon_i = \frac{dF_i}{dt} d\epsilon_i$$

Luego la constante de movimiento será:

$$\boxed{\sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \left(\frac{\partial h}{\partial \epsilon_i} q \right)_\alpha - F_i, \quad i = 1, 2, \dots, p}$$

En general dado un sistema mecánico con n grados de libertad, éste contiene $2n$ constantes de integración y, por tanto, tendremos $2n$ constantes de movimiento. En un sistema cerrado siempre podemos reescribir dichas constantes de movimiento tal que una de ellas sea simplemente un cambio de origen en el tiempo:

$$q_i = q_i(t, c'_1, c'_2, \dots, c'_{2n}) \longrightarrow q_i = q_i(t + t_0, c_1, c_2, \dots, c_{2n-1})$$

con $t_0 = t_0(c')$ y $c_i = c_i(c')$. De este modo, realmente tendremos $2n - 1$ constantes de movimiento no triviales.

Ejemplo.- El movimiento parabólico:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \dot{x}_0 t + \frac{1}{2} g t^2 = \\ &= x_0 + \dot{x}_0 (t + t_0 - t_0) + \frac{1}{2} g (t + t_0 - t_0)^2 = \\ &= x_0 + \dot{x}_0 (t + t_0) - \dot{x}_0 t_0 + \frac{1}{2} g (t + t_0)^2 + \frac{1}{2} g t_0^2 - g t_0 (t + t_0) = \\ &= x_0 - \dot{x}_0 t_0 + \frac{1}{2} g t_0^2 + (\dot{x}_0 - g t_0) (t + t_0) + \frac{1}{2} g (t + t_0)^2 \end{aligned}$$

Aparentemente tenemos más constantes de integración, sin embargo hay que recordar que t_0 es arbitrario y puede ser empleado en lugar de una de las constantes de integración. Por ejemplo podemos elegir:

- $t_0 = \frac{\dot{x}_0}{g}$

En este caso tenemos:

$$\begin{aligned} x_0 - \frac{\dot{x}_0^2}{g} + \frac{1}{2} g \left(\frac{\dot{x}_0}{g} \right)^2 + \frac{1}{2} g \left(t + \frac{\dot{x}_0}{g} \right)^2 &= \\ = x_0 - \frac{\dot{x}_0^2}{g} + \frac{1}{2} \frac{\dot{x}_0^2}{g} + \frac{1}{2} g \left(t + \frac{\dot{x}_0}{g} \right)^2 &= \\ = x_0 - g t_0^2 + \frac{1}{2} g^2 t_0^2 + \frac{1}{2} g (t + t_0)^2 . & \end{aligned}$$

- O también, $x_0 - \dot{x}_0 t_0 + \frac{1}{2} g t_0^2 = C$, siendo C una constante, en función de la cual expresar t_0 .

De especial interés son aquellas magnitudes conservadas que son aditivas (su valor es la suma de los valores en los subsistemas cuando éstos no interactúan). Así, si cada uno de estos sistemas o cuerpos interactúan durante un cierto intervalo de tiempo, podemos inferir conclusiones sobre el estado de los sistemas durante y después de la interacción, ya que dichas magnitudes conservan durante el tiempo su valor inicial, cuando los sistemas no interactuaban.

2.6. Teorema de conservación de la Energía

Resulta de la *homogeneidad* del tiempo en un sistema cerrado. El Lagrangiano no depende explícitamente de t :

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 .$$

Luego:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \ddot{q}_{\alpha} + \sum_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \ddot{q}_{\alpha} + \sum_{\alpha} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} \right) .$$

De aquí se sigue que:

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} - L \right) = 0 .$$

A la cantidad:

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} - L = E = \text{cte}, \quad (2.13)$$

le llamamos energía del sistema.

La energía también se conserva para sistemas sometidos a la acción de fuerzas externas que no dependan explícitamente del tiempo (es la única propiedad verdaderamente utilizada en la derivación anterior).

Los sistemas mecánicos cuya energía se conserva se llaman *conservativos*. Veamos que nuestra definición anterior de energía coincide con la que teníamos antes, $E = T + V$, ver (1.35).

$$L = T(q, \dot{q}) - V(q) ,$$

$$E = \sum_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} - L = \sum_{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} - T + V = 2T - T + V = T + V .$$

Ya que:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} M_{\alpha\beta} \dot{q}_{\alpha} \dot{q}_{\beta} ,$$

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} = \sum_{\alpha, \beta} M_{\alpha\beta} \dot{q}_{\alpha} \dot{q}_{\beta} = 2T ,$$

ilustración del teorema de Euler de las funciones homogéneas. En este caso, T es una función homogénea de las velocidades generalizadas de grado 2.

En coordenadas cartesianas:

$$E = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 + V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) .$$

2.7. Ímpetu

De la *homogeneidad* del espacio se sigue que el Lagrangiano de un sistema cerrado es invariante bajo un desplazamiento global $\vec{\epsilon}$ de todo el sistema. Esto es:

$$\vec{r}_i' = \vec{r}_i + \vec{\epsilon} .$$

Hasta primer orden en $\vec{\epsilon}$,

$$\delta L = 0 = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \delta \vec{r}_i = \vec{\epsilon} \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = \vec{\epsilon} \sum_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = 0$$

Dado que $\vec{\epsilon}$ es arbitrario, se sigue que,

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = \overrightarrow{cte.} = \vec{p}. \quad (2.14)$$

En el caso de partículas que no interactúan:

$$L = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \longrightarrow \vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i.$$

La forma de \vec{p} es independiente de si el sistema es libre o interactuante para Lagrangianos del tipo (2.8). Puede ser que incluso ante la presencia de un campo de fuerzas exterior alguna o algunas de las componentes del momento lineal total se conserven, son aquellas asociadas a desplazamientos a lo largo de direcciones bajo las cuales los campos externos son invariantes.

En coordenadas generalizadas llamamos a

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \quad (2.15)$$

ímpetus generalizados, y las derivadas del Lagrangiano con respecto a las coordenadas generalizadas:

$$Q_\alpha = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}, \quad (2.16)$$

se denominan *fuerzas generalizadas*. De esta forma las ecuaciones de Lagrange pueden expresarse como:

$$\dot{p}_\alpha = Q_\alpha. \quad (2.17)$$

Es interesante observar que a partir de (2.14), y aplicando las ecuaciones de Lagrange, tenemos:

$$\sum_i \vec{F}_i = - \sum_i \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} = \sum_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = 0 \quad (2.18)$$

Es decir que la suma de las fuerzas que actúan sobre todas las partículas en un sistema cerrado es nula. Particularizando (2.18) al caso de dos partículas, obtenemos la ley de acción y reacción (tercera ley de Newton).

Si descomponemos el movimiento en una parte relativa al centro de masas y otra propia de éste, tenemos:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{v}' + \vec{V} \\ \vec{P} &= \sum_i m_i \vec{v}' + \sum_i m_i \vec{V} = \sum_i m_i \vec{V}, \end{aligned}$$

luego,

$$\vec{V} = \frac{\vec{P}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i}. \quad (2.19)$$

2.8. Momento angular

La conservación del momento angular o cinético se infiere de la *isotropía* del espacio, que hace que para un sistema cerrado el Lagrangiano del mismo sea invariante bajo una rotación alrededor de un eje dado ya que no hay direcciones privilegiadas. Considerando una rotación infinitesimal de ángulo $\delta\phi$ y eje de giro \hat{n} , tenemos el siguiente cambio en las coordenadas y velocidades de las partículas a primer orden en $\delta\phi$,

$$\delta\vec{r}_i = \delta\vec{\phi} \times \vec{r}_i, \quad \delta\vec{v}_i = \delta\vec{\phi} \times \vec{v}_i, \quad (2.20)$$

donde $\delta\vec{\phi} = \hat{n}\delta\phi$. Además tenemos que:

$$\begin{aligned} \delta L = 0 &= \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \delta\vec{r}_i + \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} \delta\vec{v}_i \right) = \sum_i \left(\dot{\vec{p}}_i \delta\vec{r}_i + \vec{p}_i \delta\vec{v}_i \right) \\ &= \sum_i \left[\dot{\vec{p}}_i \left(\delta\vec{\phi} \times \vec{r}_i \right) + \vec{p}_i \left(\delta\vec{\phi} \times \vec{v}_i \right) \right] = \delta\vec{\phi} \sum_i \left(\vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i + \vec{v}_i \times \vec{p}_i \right) = 0. \end{aligned}$$

Es decir:

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i \vec{r}_i \times \vec{p} \right) = 0 \Rightarrow \vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \overrightarrow{cte}. \quad (2.21)$$

Que es la ley de conservación del momento angular o cinético, para sistemas cerrados. Aunque el sistema no esté aislado, siempre que las fuerzas externas al sistema sean simétricas respecto a una cierta dirección, los desarrollos anteriores conducen a que la componente del momento angular a lo largo de dicha dirección se conserva. Téngase en cuenta que las manipulaciones llevadas a cabo en ésta y en la sección anterior, una vez empleadas las ecuaciones de movimiento de Lagrange en coordenadas cartesianas, sólo son válidas ante la ausencia de ligaduras. No obstante, ante la presencia de ligaduras holonómicas para sistemas cerrados siempre es posible definir un momento lineal y angular invariante empleando el formalismo del teorema de Noether (2.12) y aplicándolo a traslaciones y rotaciones, respectivamente, si las ligaduras son a su vez invariantes, en orden, bajo traslaciones y rotaciones.

2.9. Transformaciones de escala

La multiplicación por una constante de la función de Lagrange no afecta a las ecuaciones de movimiento y esto, a su vez, da lugar a importantes consecuencias.

Sea V una función homogénea de las coordenadas de grado k , y α una constante cualquiera:

$$V(\alpha\vec{r}_1, \dots, \alpha\vec{r}_N) = \alpha^k V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N). \quad (2.22)$$

Una transformación de escala vendrá dada por:

$$\begin{aligned} \vec{r}_i &\longrightarrow \alpha\vec{r}_i = \vec{r}_i' \\ t &\longrightarrow \beta t = t' \end{aligned} \quad (2.23)$$

Por tanto:

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} \longrightarrow \vec{v}_i' = \frac{d\vec{r}_i'}{dt'} = \frac{\alpha}{\beta} \vec{v}_i \Rightarrow T' \longrightarrow \frac{\alpha^2}{\beta^2} T \quad (2.24)$$

$$L(\vec{r}', \vec{v}') = T' - V' \Rightarrow \frac{\alpha^2}{\beta^2} T - \alpha^k V = \alpha^k L, \quad (2.25)$$

si y sólo si:

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \alpha^k \Rightarrow \beta = \alpha^{1-k/2}, \quad (2.26)$$

y entonces la transformación de escala es una simetría.

El cambio en las coordenadas por un factor de escala da lugar a trayectorias geoméricamente equivalentes. Así pues, si la energía potencial es una función homogénea de las coordenadas, dada una solución a las ecuaciones de movimiento, dichas ecuaciones de movimiento admiten otras (infinitas) geoméricamente equivalentes. De (2.26) los tiempos del movimiento entre puntos correspondientes de las trayectorias estarán en la relación:

$$t'/t = (l'/l)^{1-k/2}, \quad (2.27)$$

siendo l'/l el cociente entre las dimensiones lineales de las dos trayectorias.

Igual que los tiempos, las relaciones para las velocidades, las energía y los momentos angulares serán:

$$v'/v = (l'/l)^{k/2}, \quad E'/E = (l'/l)^k, \quad L'/L = (l'/l)^{1+k/2}. \quad (2.28)$$

Analicemos algunos ejemplos.

- Pequeñas oscilaciones, $k = 2$.

$$t'/t = 1$$

El período no depende de las oscilaciones.

- Campo de fuerzas homogéneo, $\vec{F} = \overrightarrow{cte.}$, $V = -\vec{F}\vec{r}$, $k = 1$.

$$t'/t = \sqrt{l'/l},$$

Los cuadrados de los tiempos de caída de un cuerpo en el campo de gravedad terrestre dependen, en proporción directa, de la altura inicial de caída de dichos cuerpos.

- Campo Newtoniano o Coulombiano, $k = -1$.

$$t'/t = (l'/l)^{3/2}.$$

El cuadrado del período de revolución es proporcional a los cubos de las dimensiones lineales de las órbitas (tercera ley de Kepler).

TEOREMA DEL VIRIAL

Si el movimiento del sistema tiene lugar en una región limitada del espacio, hay una relación entre la energía cinética y la potencial cuando la última es una función homogénea de las coordenadas. A esta relación se le llama *teorema del virial*.

En un sistema cerrado, hemos visto que T es un función homogénea cuadrática de las velocidades:

$$2T = \sum_i \vec{v}_i \frac{\partial T}{\partial \vec{v}_i} = \sum_i \vec{v}_i \vec{p}_i = \frac{d}{dt} \left(\sum_i \vec{p}_i \vec{r}_i \right) - \sum_i \vec{r}_i \dot{\vec{p}}_i . \quad (2.29)$$

El valor medio de una función cualquiera del tiempo $f(t)$ se define como:

$$\bar{f} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t) dt .$$

Si $f = \frac{dF}{dt}$, y $F(t)$ no toma valores infinitos:

$$\bar{f} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{dF}{dt} dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{F(\tau) - F(0)}{\tau} = 0 .$$

Aplicamos este resultado para calcular el valor medio en el tiempo de (2.29). Suponiendo que el movimiento está acotado y las velocidades son finitas, el término $\sum_i \vec{p}_i \vec{r}_i$ es finito, y, por tanto, el valor medio del primer sumando de (2.29) se anula. De este resultado y sustituyendo $\dot{\vec{p}}_i$ por $-\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i}$ en (2.29) tenemos:³

$$2\bar{T} = \overline{\sum_i \vec{r}_i \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i}} = k\bar{V}$$

ya que al ser V una función de homogénea de grado k , tenemos:

$$\sum_i \vec{r}_i \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} = kV . \quad (2.30)$$

Por lo tanto,

$$E = \bar{E} = \bar{T} + \bar{V} = \frac{k}{2}\bar{V} + \bar{V} = \left(1 + \frac{k}{2}\right) \bar{V} . \quad (2.31)$$

Se sigue pues:

$$\begin{aligned} \bar{V} &= \frac{2}{k+2} \bar{E} , \\ \bar{T} &= \frac{k}{k+2} \bar{E} . \end{aligned} \quad (2.32)$$

Algunos ejemplos:

³Por tanto, suponemos a partir de este paso la ausencia de ligaduras.

- Pequeñas oscilaciones, $k = 2$,

$$\bar{T} = \bar{V} = E/2 .$$

- Interacción Newtoniana o Coulombiana, $k = -1$,

$$E = -\bar{T} .$$

2.10. El problema de tres cuerpos: solución de Lagrange

El problema de tres cuerpos se puede resolver de forma elemental y cerrada si se supone que el triángulo formado por los tres cuerpos celestes siempre permanece semejante a sí mismo.

Mostraremos en este caso que:

1. El plano que incluye los tres puntos masivos queda fijo en el espacio.
2. La resultante de las fuerzas Newtonianas sobre cada uno de los tres puntos pasa a través de su centro de masa común.
3. El triángulo formado por ellos es equilátero.
4. Los tres cuerpos describen cónicas semejantes unas a las otras con el centro de masa común en uno de los focos.

Sin pérdida de generalidad tomamos el centro de masa (CM), O , en reposo. Sea S el plano que pasa a través de los tres puntos P_1 , P_2 y P_3 (masas m_1 , m_2 y m_3 , respectivamente) y, por tanto, también incluye el CM, O . El plano S rota alrededor de O , que es fijo. Esta rotación tendrá, en general, una componente a lo largo de la normal a S a través de O .

Consideremos un sistema de referencia fijo en S desde el que observamos el movimiento de los puntos P_k , $k = 1, 2, 3$. El sistema O fijo en S es no inercial, ya que respecto al espacio rota con una velocidad angular $\vec{\omega}$. Si llamamos \vec{v}_k a la velocidad observada en S desde O y \vec{w}_k a aquella observada por el observador inercial, tenemos:

$$\vec{w}_k = \vec{v}_k + \vec{\omega} \times \vec{r}_k , \quad (2.33)$$

ya que durante el intervalo dt el sistema S rota respecto del sistema inercial. Del mismo modo en un intervalo de tiempo dt tendremos,

$$d\vec{w}_k = d\vec{v}_k + \vec{\omega} \times \vec{v}_k dt + d(\vec{\omega} \times \vec{r}_k) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_k) dt , \quad (2.34)$$

donde el segundo y cuarto sumandos tienen en cuenta la variación en los vectores \vec{v}_k y \vec{r}_k , referidos al sistema de referencia en S , debido a la rotación del mismo. Con ello, la aceleración desde el sistema de referencia inercial en función de las observaciones del sistema de referencia no inercial en S viene dada por,

$$\frac{d\vec{w}_k}{dt} = \frac{d\vec{v}_k}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_k + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_k + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{v}_k) = \frac{\vec{F}_k}{m_k} , \quad (2.35)$$

donde en la última igualdad hemos aplicado la segunda ley de Newton, válida en el sistema de referencia inercial, con \vec{F}_k la resultante de las fuerzas Newtonianas sobre la partícula k . Por otra parte,

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_k) = \vec{\omega} (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_k) - \vec{r}_k (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) = \vec{\omega} (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_k) - \omega^2 \vec{r}_k . \quad (2.36)$$

Luego:

$$\frac{\vec{F}_k}{m_k} = \frac{d\vec{v}_k}{dt} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_k + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_k + \vec{\omega} (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_k) - \omega^2 \vec{r}_k . \quad (2.37)$$

Por ejemplo:

$$\frac{\vec{F}_1}{m_1} = \frac{Gm_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} + \frac{Gm_3}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^2} \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|} . \quad (2.38)$$

Fijamos el sistema de coordenadas cartesianas en S , con origen en O , con los ejes x e y arbitrariamente orientados en el plano S . En O , el eje z es perpendicular a S . La componente ω_3 queda determinada tal que la dirección de uno de los vectores \vec{OP}_k esté fijada en S . Como hemos supuesto que el triángulo $\widehat{P_1 P_2 P_3}$ se ha de mantener semejante ello implica que la dirección de cualquiera de los otros dos vectores \vec{OP}_k tiene también dirección fija en S . Podemos entonces escribir:

$$\vec{r}_k = \lambda(t) (a_k, b_k, 0) , \quad (2.39)$$

en S , y donde a_k, b_k son las coordenadas iniciales de P_k en algún tiempo dado. El factor $\lambda(t)$ determina el cambio en las longitudes de los vectores,

$$\begin{aligned} \vec{v}_k &= \dot{\lambda}(t) (a_k, b_k, 0) , \\ \frac{dv_k}{dt} &= \ddot{\lambda}(t) (a_k, b_k, 0) . \end{aligned} \quad (2.40)$$

En S , \vec{F}_k tiene una componente z nula, y componentes x e y inversamente proporcionales a λ^2 . En forma abreviada:

$$\frac{F_k}{m_k} = \frac{1}{\lambda(t)^2} (L_k, M_k, 0) . \quad (2.41)$$

La componente z de las ecuaciones de movimiento (2.35) viene dada por:

$$\begin{aligned} 2\dot{\lambda}(\omega_1 b_k - \omega_2 a_k) + \lambda\omega_3(a_k\omega_1 + b_k\omega_2) + \lambda(\dot{\omega}_1 b_k - \dot{\omega}_2 a_k) &= 0 , \\ \underbrace{(-2\dot{\lambda}\omega_2 + \lambda\omega_3\omega_1 - \lambda\dot{\omega}_2)}_{f(t)} a_k + \underbrace{(2\dot{\lambda}\omega_1 + \lambda\omega_3\omega_2 + \lambda\dot{\omega}_1)}_{g(t)} b_k &= 0 , \end{aligned} \quad (2.42)$$

donde f y g no dependen de a_k y b_k . La expresión anterior se puede reescribir como,

$$\frac{f(t)}{g(t)} = -\frac{b_k}{a_k} . \quad (2.43)$$

Sin embargo, puesto que los puntos son no colineales se sigue que $f = g = 0$, puesto que de lo contrario la pendiente sería la misma para las rectas que unen los puntos materiales con O y serían por tanto colineales. De este modo,

$$\begin{aligned} 2\dot{\lambda}\omega_1 &= -\lambda(\omega_3\omega_2 + \dot{\omega}_1) , \\ 2\dot{\lambda}\omega_2 &= \lambda(\omega_3\omega_1 - \dot{\omega}_2) . \end{aligned} \quad (2.44)$$

Multiplicando por ω_1 y ω_2 , y luego sumando:

$$\begin{aligned} 2\dot{\lambda}(\omega_1^2 + \omega_2^2) &= -\lambda(\dot{\omega}_1\omega_1 + \dot{\omega}_2\omega_2) , \\ 2\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} &= -\frac{\dot{\omega}_1\omega_1 + \dot{\omega}_2\omega_2}{\omega_1^2 + \omega_2^2} . \end{aligned} \quad (2.45)$$

Con lo que obtenemos, resolviendo la ecuación diferencial anterior:

$$\begin{aligned} 2 \log \lambda &= -\frac{1}{2} \log(\omega_1^2 + \omega_2^2) + B , \\ \frac{C}{\lambda^4} &= \omega_1^2 + \omega_2^2 . \end{aligned} \quad (2.46)$$

Analicemos a continuación las componentes x , y de las ecuaciones de movimiento (2.35):

$$\begin{aligned} \ddot{\lambda}a_k - 2\omega_3\dot{\lambda}b_k - \dot{\omega}_3\lambda b_k + \omega_1\lambda(\omega_1a_k + \omega_2b_k) \\ - \lambda a_k(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) &= \frac{L_k}{\lambda^2} , \\ \ddot{\lambda}b_k + 2\omega_3\dot{\lambda}a_k + \dot{\omega}_3\lambda a_k + \omega_2\lambda(\omega_1a_k + \omega_2b_k) - \\ - \lambda b_k(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) &= \frac{M_k}{\lambda^2} . \end{aligned}$$

Agrupando factores:

$$\begin{aligned} \left\{ \ddot{\lambda} - \lambda(\omega_2^2 + \omega_3^2) \right\} a_k - \left\{ 2\omega_3\dot{\lambda} + \lambda(\dot{\omega}_3 - \omega_1\omega_2) \right\} b_k &= \frac{L_k}{\lambda^2} , \\ \left\{ 2\omega_3\dot{\lambda} + \lambda(\omega_1\omega_2 + \dot{\omega}_3) \right\} a_k + \left\{ \ddot{\lambda} - \lambda(\omega_1^2 + \omega_3^2) \right\} b_k &= \frac{M_k}{\lambda^2} , \end{aligned} \quad (2.47)$$

con $k = 1, 2, 3$. Así los $\{\dots\}$ satisfacen tres ecuaciones lineales con coeficientes constantes y por tanto deben ser constantes (si el determinante se anulase los vectores serían colineales). Se sigue entonces que la diferencia del primer y cuarto paréntesis y del segundo y tercero, serán constantes divididas por λ^2 .

$$\omega_1^2 - \omega_2^2 = \frac{A}{\lambda^3}, \quad 2\omega_1\omega_2 = \frac{B}{\lambda^3} , \quad (2.48)$$

o equivalentemente,

$$(\omega_1 \pm i\omega_2)^2 = \frac{A \pm iB}{\lambda^3} . \quad (2.49)$$

El módulo al cuadrado viene dado por,

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = \sqrt{A^2 + B^2}/\lambda^3, \quad D = \sqrt{A^2 + B^2}. \quad (2.50)$$

Comparando esto con (2.46) tenemos,

$$\lambda = \frac{C}{D} = \text{cte.} \quad (2.51)$$

A no ser que tanto C como D se anulen.⁴ De acuerdo con (2.48), $\lambda = \text{cte.}$ haría que ω_1 y ω_2 fueran constantes, luego a partir de (2.44), ω_3 tendría que ser cero o bien $\omega_1 = \omega_2 = 0$. Si $\omega_3 = 0$, y como ω_2 es constante en cualquier caso, por una elección adecuada de coordenadas x, y podríamos incluso hacer $\omega_2 = 0$. Pero entonces, de (2.47), obtendríamos que $L_k = 0$. En ese caso los tres puntos serían colineales, en contradicción con nuestra hipótesis. Por lo tanto sólo queda la posibilidad de que $\omega_1 = \omega_2 = 0$ y así $C = D = 0$. Esto prueba nuestra primera afirmación: *el plano S gira según ω_3 (eje normal a sí mismo) y se mantiene fijo en el espacio.*

Como los puntos respecto de S sólo se contraen o dilatan, no contribuye este movimiento a la velocidad areolar, es decir, al módulo de la tercera componente del momento angular del movimiento de los tres puntos respecto de O según el sistema de referencia inercial. Así, sólo hay contribución debido al movimiento de rotación de S a la tercera componente del momento angular que se conserva al ser un sistema cerrado:

$$\text{cte.} = \omega_3 \sum_k m_k |\vec{r}_k|^2 = \omega_3 \lambda^2 \sum_k m_k (a_k^2 + b_k^2).$$

Entonces podemos escribir:

$$\lambda^2 \omega_3 = \gamma, \quad \gamma = \text{cte.} \quad (2.52)$$

De lo que sigue:

$$2\dot{\lambda}\lambda\omega_3 + \lambda^2\dot{\omega}_3 = 0. \quad (2.53)$$

De este resultado, y recordando que $\omega_1 = \omega_2 = 0$, las ecuaciones (2.47) se simplifican notablemente,

$$\lambda^2 \ddot{\lambda} - \frac{\gamma^2}{\lambda} = \frac{L_k}{a_k} = \frac{M_k}{b_k}. \quad (2.54)$$

En particular, $\frac{L_1}{a_1} = \frac{M_1}{b_1}$, por lo que para F_1 tenemos:

$$|\vec{r}_1 \times \vec{F}_1| = \frac{m_1}{\lambda} |a_1 M_1 - b_1 L_1| = 0. \quad (2.55)$$

Notemos que $\vec{r}_1 \times \vec{F}_1$ sólo puede tener componente perpendicular al plano S . Así que \vec{F}_1 pasa por el centro de masa O . Lo mismo ocurre para \vec{F}_2 y \vec{F}_3 . Esta es nuestra segunda afirmación: *la resultante de las fuerzas que actúan sobre P_k pasa por el centro de masa de las partículas m_k .*

⁴De (2.46) y (2.50) está claro que si una de las dos constantes C o D es cero, entonces la otra constante también se anula.

Calculando explícitamente el momento de \vec{F}_1 respecto de O , teniendo en cuenta (2.38), tenemos:

$$\frac{\vec{r}_1 \times \vec{F}_1}{m_1 G} = m_2 \frac{\vec{r}_1 \times \vec{r}_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} + m_3 \frac{\vec{r}_1 \times \vec{r}_3}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^3} = 0 . \quad (2.56)$$

Por definición del centro de masa, y puesto que el origen coincide con éste,

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3 = 0 . \quad (2.57)$$

Por lo tanto:

$$m_2 \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_1 \times \vec{r}_3 = -m_1 \vec{r}_1 \times \vec{r}_1 = 0 .$$

Así que:

$$\frac{\vec{r}_1 \times \vec{F}_1}{m_1 G} = m_2 \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 \left(\frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} - \frac{1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^2} \right) = 0 , \quad (2.58)$$

luego,

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = |\vec{r}_3 - \vec{r}_1| . \quad (2.59)$$

Análogamente para $|\vec{r}_3 - \vec{r}_2| = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$, etc. Luego hemos demostrado nuestra tercera afirmación: *el triángulo formado por los tres puntos materiales es equilátero.*

Los cocientes $\frac{L_k}{a_k}$ y $\frac{M_k}{b_k}$, de (2.54) pueden ser cada uno de ellos determinados. Para este fin, sea $\lambda(t)s$ el lado del triángulo, donde s :

$$s^2 = (a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2 = (a_3 - a_2)^2 + (b_3 - a_2)^2 = \dots \quad (2.60)$$

De acuerdo con (2.38) y (2.41):

$$\begin{aligned} \frac{L_1}{\lambda^2} &= \frac{G m_2}{\lambda^2 s^2} \frac{\lambda(a_2 - a_1)}{\lambda s} + \frac{G m_3}{\lambda^2 s^2} \frac{\lambda(a_3 - a_1)}{\lambda s} , \\ \frac{L_1}{a_1} &= \frac{G}{s^3 a} \{m_2(a_2 - a_1) + m_3(a_3 - a_1)\} = \\ &= \frac{G}{s^3 a_1} \{-m_1 a_1 - m_2 a_1 - m_3 a_1\} = \\ &= \frac{G}{s^3} \{-m_1 - m_2 - m_3\} . \end{aligned} \quad (2.61)$$

Análogos resultados se siguen para el resto de $\frac{L_k}{a_k}$ y también para $\frac{M_k}{b_k}$. Sustituyendo en (2.54), tenemos:

$$\lambda^2 \ddot{\lambda} - \frac{\gamma^2}{\lambda} = -\frac{G}{s^3} (m_1 + m_2 + m_3) = -\frac{G}{s^3} \mathcal{M} . \quad (2.62)$$

Donde $\mathcal{M} = \sum_{i=1}^3 m_i$. Esta ecuación describe la variación de λ con el tiempo y con ello el ritmo con el que el triángulo en S se contrae o dilata.

Hay una forma más simple de determinar la forma de las trayectorias. Para ello, abandonamos el sistema de referencia no inercial S y observamos el movimiento desde un sistema de referencia inercial S' , que coincide con S pero fijo en el espacio (no rota). Entonces:

$$\begin{aligned} |F_k| &= \frac{m_k}{\lambda^2} (L_k^2 + M_k^2)^{1/2} = \frac{m_k}{\lambda^2} \left\{ a_k^2 \frac{G^2}{s^6} \mathcal{M}^2 + b_k^2 \frac{G^2}{s^6} \mathcal{M}^2 \right\}^{1/2} \\ &= \frac{Gm_k}{\lambda^2 s^3} \mathcal{M} \{a_k^2 + b_k^2\}^{1/2} = \frac{Gm_k}{\lambda^2 s^3} \mathcal{M} \{a_k^2 + b_k^2\}^{1/2} . \end{aligned} \quad (2.63)$$

La única cantidad que varía con el tiempo en el miembro derecho es λ^2 , que con (2.39), puede ser expresada en términos de $|\vec{r}_k|$:

$$\lambda^2 = \frac{|\vec{r}_k|^2}{a_k^2 + b_k^2} . \quad (2.64)$$

Llevando (2.64) a (2.63) y haciendo $m'_k = m_k \frac{(a_k^2 + b_k^2)^{3/2}}{s^3}$,

$$|F_k| = \frac{Gm'_k \mathcal{M}}{|\vec{r}_k|^2} . \quad (2.65)$$

Recordemos que las fuerzas están en el vector \vec{OP}_k apuntando al centro de masas. Así, como en el problema de dos cuerpos, *cada una de los puntos P_k describe una cónica con un foco en O .*

Ahora debemos ver si estas cónicas son similares entre sí. Para ello sea el instante de tiempo tal que $\lambda = \lambda_{\text{extr}}$, donde la distancia de m_k , para todo k , a O alcanza su máximo, dado por,

$$\lambda_{\text{extr}}(a_k^2 + b_k^2)^{1/2} . \quad (2.66)$$

En este instante la velocidad radial en S es cero, y en S' es $\vec{\omega} \times \vec{r}_k$, con \vec{r}_k dado por (2.39). El factor $(a_k + b_k)^{1/2}$, en esta distancia máxima, es una medida de la semejanza, no sólo de las velocidades iniciales y distancias iniciales desde el CM común, sino del tamaño de las tres cónicas resultantes de estas condiciones iniciales. Las posiciones de las cónicas se distinguen por los ángulos que los \vec{OP}_k forma entre sí. Con esto hemos probado la cuarta afirmación. Si las masas son iguales $m_1 = m_2 = m_3$, el CM coincide con la intersección de las medianas y las cónicas están desplazadas una respecto a la otra 120° .

2.11. El principio de la ligadura mínima de Gauss

Gauss inventó el método de los mínimos cuadrados. Estableció el principio de la ligadura mínima en mecánica clásica, diciendo:

“Es remarcable que la Naturaleza modifique los movimientos libres incompatibles con las ligaduras del mismo modo que el matemático utiliza los mínimos cuadrados para poner de acuerdo resultados que están basados en cantidades conectadas entre sí por relaciones de necesidad.”

Construimos este “mínimo cuadrado” de desviación respecto al “movimiento libre” (aquel donde las ligaduras no actúan):

$$\mathcal{Z} = \sum_{k=1}^{3N} m_k \left(\ddot{x}_k - \frac{X_k}{m_k} \right)^2 = \sum_{k=1}^{3N} \frac{1}{m_k} (m_k \ddot{x}_k - X_k)^2 . \quad (2.67)$$

Con la notación, por ejemplo para la partícula 1:

$$m_1 = m_2 = m_3 = m, \quad \vec{r}_1 = (x_1, x_2, x_3), \quad \vec{F}_1^{(a)} = (X_1, X_2, X_3) , \quad (2.68)$$

y así sucesivamente, en saltos de 3, para el resto de partículas. Además, $\vec{F}_i^{(a)}$ son las fuerzas aplicadas y $m_k \ddot{x}_k - X_k$ es la fuerza perdida (la parte de X_k que no se aprovecha para producir movimiento). Hagamos:

$$\delta \mathcal{Z} = 0 , \quad (2.69)$$

con las condiciones:⁵

(a) $\delta x_k = \delta \dot{x}_k = 0$

(b) Ligaduras holonómicas:

$$f_I(x_1, x_2, \dots, x_{3N}, t) = 0 , \quad I = 1, \dots, K ,$$

$$\delta f_I = 0, \quad \sum_k \frac{\partial f_I}{\partial x_k} \delta x_k = 0 .$$

(c) O de forma más general, ligaduras $A_{Ik} \delta x_k = 0$, $A_{Ik} = A_{Ik}(x, t)$.

Diferenciamos dos veces respecto del tiempo en (b),

$$\frac{d^2 f_I}{dt^2} = \sum_{k,l} \frac{\partial^2 f_I}{\partial x_k \partial x_l} \dot{x}_k \dot{x}_l + 2 \sum_k \frac{\partial^2 f_I}{\partial t \partial x_k} \dot{x}_k + \frac{\partial^2 f_I}{\partial t^2} + \sum_k \frac{\partial f_I}{\partial x_k} \ddot{x}_k = 0 , \quad (2.70)$$

y si tenemos en cuenta (a), la variación de la expresión anterior debe satisfacer:

$$\sum_k \frac{\partial f_I}{\partial x_k} \delta \ddot{x}_k = 0 , \quad (2.71)$$

que fija las relaciones de ligadura entre las aceleraciones. Aplicamos el método de los multiplicadores de Lagrange:

$$- 2 \sum_{I,k} \lambda_I(t) \frac{\partial f_I}{\partial x_k} \delta \ddot{x}_k = 0 , \quad (2.72)$$

⁵Nótese que el principio de Gauss se refiere a un tiempo t fijo en el que el estado del sistema está dado y por ende $\delta x_k = \delta \dot{x}_k = 0$.

Luego volviendo a (2.69):

$$\delta \mathcal{Z} = 2 \sum_{k=1}^{3N} m_k \left(\ddot{x}_k - \frac{X_k}{m_k} \right) \delta \ddot{x}_k - 2 \sum_{I,k} \lambda_I(t) \frac{\partial f_I}{\partial x_k} \delta \ddot{x}_k = 0 . \quad (2.73)$$

Agrupando términos:

$$\delta \mathcal{Z} = 2 \sum_{k=1}^{3N} \left\{ m_k \ddot{x}_k - X_k - \sum_I \lambda_I(t) \frac{\partial f_I}{\partial x_k} \right\} \delta \ddot{x}_k = 0 . \quad (2.74)$$

Por supuesto la relación anterior sólo se satisface para el movimiento real del sistema $x_k(t)$. Tenemos K ligaduras y elegimos los $\lambda_I(t)$ tal que cancelen K sumandos de (2.74), y el resto son ya independientes y, por tanto, se anulan uno a uno. En ambos casos se sigue:

$$m_k \ddot{x}_k - X_k - \sum_I \lambda_I(t) \frac{\partial f_I}{\partial x_k} = 0 . \quad (2.75)$$

Éstas son las ecuaciones de Lagrange de primera especie. Tenemos por tanto $3N$ ecuaciones y K ligaduras para $3N$ funciones $x_k(t)$ y K multiplicadores $\lambda_I(t)$.

Para el caso especial (c), tenemos, en particular:

$$\sum_k A_{Ik} \dot{x}_k = 0 \quad (2.76)$$

Observamos que basta hacer el cambio en (2.75):

$$\frac{\partial f_I}{\partial x_k} \longrightarrow A_{Ik}(x, t) , \quad (2.77)$$

para aplicar nuestros resultados también a este tipo de ligaduras.

2.12. El principio de Hamilton con ligaduras

Analizaremos los casos holonómico y no holonómico.

2.12.1. Ligaduras holonómicas

En este caso:

$$f_I(q, t) = 0, \quad I = 1, \dots, K . \quad (2.78)$$

Empleamos de nuevo el método de los multiplicadores de Lagrange, $\lambda_I(t)$:

$$\delta f_I = 0 = \sum_{\alpha} \frac{\partial f_I}{\partial q_{\alpha}} \delta q_{\alpha} , \quad \sum_{\alpha} \sum_{I=1}^K \lambda_I \frac{\partial f_I}{\partial q_{\alpha}} \delta q_{\alpha} = 0 . \quad (2.79)$$

Ahora sumamos el anterior resultado a la variación de la acción:

$$\delta S = - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha} \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} - \sum_{I=1}^K \lambda_I \frac{\partial f_I}{\partial q_{\alpha}} \right\} \delta q_{\alpha} dt = 0 . \quad (2.80)$$

Elegimos K multiplicadores $\lambda_I(t)$ tal que cancelen los correspondientes sumandos en (2.80), siendo el resto linealmente independientes por ser ahora arbitrarios los δq_{α} . Por lo tanto podemos escribir:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} - \sum_I \lambda_I \frac{\partial f_I}{\partial q_{\alpha}} = 0 . \quad (2.81)$$

Estas ecuaciones son las mismas que las ecuaciones de Lagrange obtenidas a partir del Lagrangiano,

$$\bar{L} = L + \sum_{I=1}^K \lambda_I(t) f_I , \quad (2.82)$$

con $\delta \bar{L} = \delta L + \sum_{I=1}^K \lambda_I(t) \delta f_I$, imponiendo finalmente, tras la minimización de la correspondiente acción, que $f_I = 0$, para todo I .

En definitiva tenemos n ecuaciones diferenciales, K ligaduras, n grados de libertad y K multiplicadores de Lagrange. Las n ecuaciones diferenciales de segundo orden dan a su vez lugar a las $2n$ constantes de integración arbitrarias que se determinan a partir de las condiciones iniciales del movimiento. De las $2n$ constantes de integración sólo $2n - K$ son independientes dada la existencia de las K ligaduras. Recordemos que los multiplicadores de Lagrange se ponen en función de las $q_{\alpha}(t)$ y, al particularizar las ligaduras a $t = 0$, éstas implican K restricciones que afectan a las coordenadas iniciales.

Este caso se generaliza de forma directa a un tipo especial de ligaduras no holonómicas, es decir, aquéllas que son del tipo $\sum_{\alpha} A_{I\alpha}(q, t) \delta q_{\alpha} = 0$. Basta hacer el intercambio $\frac{\partial f_I}{\partial q_{\alpha}} \rightarrow A_{I\alpha}$, al igual que en (2.77), y obtenemos:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} - \sum_{I=1}^K \lambda_I A_{I\alpha} = 0 . \quad (2.83)$$

Aunque ahora no se puede obtener un nuevo Lagrangiano \bar{L} a partir del cual derivar las ecuaciones anterior como ecuaciones de Lagrange puesto que las ligaduras son no integrables.

2.12.2. Ligaduras no holonómicas

Supongamos ahora que las ligaduras son de la forma $f_I(q, \dot{q}, t) = 0$, $I = 1, \dots, K$, y apliquemos de forma directa el planteamiento anterior mediante el uso de los multiplicadores de Lagrange. Tenemos:

$$\begin{aligned} \delta f_I &= 0 = \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial f_I}{\partial q_{\alpha}} \delta q_{\alpha} + \frac{\partial f_I}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \delta \dot{q}_{\alpha} \right) , \\ \delta S &= 0 = - \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{\alpha} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} \right) \delta q_{\alpha} + \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{\alpha, I} \left(\lambda_I \frac{\partial f_I}{\partial q_{\alpha}} \delta q_{\alpha} + \lambda_I \frac{\partial f_I}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \delta \dot{q}_{\alpha} \right) \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{\alpha} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} \right) \delta q_{\alpha} + \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{\alpha, I} \left(\lambda_I \frac{\partial f_I}{\partial q_{\alpha}} - \frac{d}{dt} \left[\lambda_I \frac{\partial f_I}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \right] \right) \delta q_{\alpha} = 0 . \end{aligned} \quad (2.84)$$

Llegamos, por tanto, a las siguientes ecuaciones:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} = \sum_{I=1}^K \left(\lambda_I \frac{\partial f_I}{\partial q_{\alpha}} - \frac{d}{dt} \left[\lambda_I \frac{\partial f_I}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \right] \right) . \quad (2.85)$$

Estas n ecuaciones no tienen sentido físicamente ya que en ellas los $\lambda_I(t)$ han de satisfacer una ecuación diferencial de primer orden, con lo que se generan $2n+K$ constantes de integración. De las n ecuaciones diferenciales K son empleadas para fijar los multiplicadores de Lagrange, y el resto, $n-K$, junto con las K ligaduras, nos permiten determinar $q_{\alpha}(t)$ en función de $q_{\alpha}(0)$, $\dot{q}_{\alpha}(0)$ y $\lambda_I(0)$. Sin embargo, sólo nos es posible conocer el estado del sistema en un cierto instante de tiempo, que podemos tomar como el inicial, y con ello determinar $q_{\alpha}(0)$, $\dot{q}_{\alpha}(0)$. Por ello, no hay posibilidad de conocer los valores iniciales $\lambda_I(0)$.⁶

En este caso, más general, hay que modificar las restricciones impuestas sobre los δq_{α} en el principio de Hamilton debido a las ligaduras semiholonómicas. Recordemos que en el caso holonómico obteníamos una relación de la forma:

$$\delta f_I = \sum_{\alpha} \frac{\partial f_I}{\partial q_{\alpha}} \delta q_{\alpha} = 0 . \quad (2.86)$$

Procedemos a reinterpretar y generalizar este resultado. Podemos, para ello, considerar que (2.86) es un producto de vectores, siendo los δq_{α} ortogonales a los vectores $\partial f_I / \partial q_{\alpha}$. Es decir, una relación de ortogonalidad en el espacio de configuración entre los K vectores $(\frac{\partial f_I}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial f_I}{\partial q_n})$ y los vectores de posición (q_1, \dots, q_n) . Derivemos temporalmente las ligaduras,

$$\begin{aligned} \frac{df_I}{dt} &= \sum_{\alpha} \frac{\partial f_I}{\partial q_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} + \frac{\partial f_I}{\partial t} = g_I(q, \dot{q}, t) = 0 , \\ \frac{d^2 f_I}{dt^2} &= \sum_{\alpha} \frac{\partial f_I}{\partial q_{\alpha}} \ddot{q}_{\alpha} + 2 \sum_{\alpha} \frac{\partial g_I}{\partial q_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} + \frac{\partial g_I}{\partial t} = 0 . \end{aligned} \quad (2.87)$$

⁶Nótese que por definición si $q_{\alpha}(t) = q_{\alpha}(q(0), \dot{q}(0), \lambda_I(0), t)$ entonces para $t = 0$ tenemos las identidades $q_{\alpha}(0) = q_{\alpha}(q(0), \dot{q}(0), \lambda_I(0), 0) \equiv q_{\alpha}(0)$, $\dot{q}_{\alpha}(0) = \dot{q}_{\alpha}(q(0), \dot{q}(0), \lambda_I(0), 0) \equiv \dot{q}_{\alpha}(0)$, con lo que no hay posibilidad de determinar los $\lambda_I(0)$ a partir del conocimiento del estado inicial del sistema. Las K ligaduras sólo nos permiten conocer K constantes iniciales, relativas a $q(0)$ y $\dot{q}(0)$, en función del resto.

Justamente los δq_α , tal y como hemos visto de (2.86), son ortogonales a los vectores $\partial f_I / \partial q_\alpha$ que dan la proyección de las aceleraciones en el espacio K -dimensional generado por los vectores $(\frac{\partial f_I}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial f_I}{\partial q_n})$.

Hacemos la suposición de que las ligaduras sólo afectan a las aceleraciones a través de la ecuación anterior, o análogas, y que los desplazamientos δq_α en el principio de Hamilton deben ser ortogonales a los vectores sobre los que se proyectan las aceleraciones. Por lo tanto, para nuestras ligaduras no holonómicas $f_I = f_I(q, \dot{q}, t)$ tenemos,

$$\frac{df_I}{dt} = \sum_{\alpha} \frac{\partial f_I}{\partial \dot{q}_\alpha} \ddot{q}_\alpha + \sum_{\alpha} \frac{\partial f_I}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial g_I}{\partial t} . \quad (2.88)$$

Así, hemos de imponer que las ligaduras vecinas en las que se evalúa la acción cumplan

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial f_I}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta q_\alpha = 0 , \quad (2.89)$$

que es una condición distinta al cumplimiento de las ligaduras. Es decir, estamos comparando la trayectoria real del sistema, que sí que cumple las ligaduras, con otras que no las cumplen en general, sino que satisfacen la ecuación anterior.

Llevando esta restricción a la variación de la acción, y empleando multiplicadores de Lagrange:

$$\delta S = - \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{\alpha} \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \sum_{I=1}^K \lambda_I \frac{\partial f_I}{\partial \dot{q}_\alpha} \right\} \delta q_\alpha dt . \quad (2.90)$$

Y, de nuevo, elegimos K multiplicadores λ_I , de forma que se anulen K sumandos de (2.90), por lo que las ecuaciones de Lagrange quedan en la forma:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \sum_{I=1}^K \lambda_I \frac{\partial f_I}{\partial \dot{q}_\alpha} . \quad (2.91)$$

Si las ligaduras son de la forma $f_I = \sum_{\alpha} A_{I\alpha}(q, t) \delta q_\alpha = 0$, entonces $\frac{\partial f_I}{\partial \dot{q}_\alpha} = A_{I\alpha}$ y se aplica entonces (2.91).

Aunque hemos llegado a (2.89) por analogía con el caso holonómico, dicha ecuación puede ser de hecho deducida a partir del principio de la ligadura mínima de Gauss, sección 2.11. En dicho principio variacional el estado del sistema está fijo con lo que se impone que $\delta x_k = \delta \dot{x}_k = 0$ y, así, las ligaduras semiholonómicas, $f_I(q, \dot{q}, t) = 0$ se cumplen directamente tanto para la trayectoria real del sistema como para las trayectorias vecinas donde también se evalúa \mathcal{Z} , véase la ecuación (2.67) para su definición. Téngase en cuenta que las coordenadas generalizadas q_α son función de $q_\alpha(x, t)$ y con ello $\dot{q}(x, \dot{x}, t)$, por lo tanto, $\delta q_\alpha = \delta \dot{q}_\alpha = 0$. Derivando respecto del tiempo la ligadura $f_I(q, \dot{q}, t) = 0$ y tomando su variación,⁷ llegamos a que:

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial f_I}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta \ddot{q}_\alpha = 0 . \quad (2.92)$$

⁷Recordando de nuevo que $\delta q_\alpha = \delta \dot{q}_\alpha = 0$.

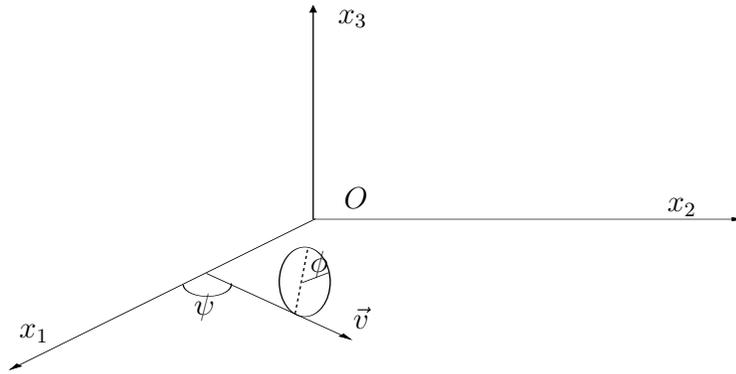


Figura 2.2: Disco que rueda sin deslizar en el plano.

Por lo tanto, añadiendo

$$\sum_I \lambda_I(t) \sum_\alpha \frac{\partial f_I}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta \ddot{q}_\alpha = 0, \quad (2.93)$$

a $\delta \mathcal{Z}$, tenemos:

$$\delta \mathcal{Z} - \sum_I \lambda_I(t) \sum_\alpha \frac{\partial f_I}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta \ddot{q}_\alpha = 0. \quad (2.94)$$

De $\delta \mathcal{Z}$ obtenemos las expresiones correspondientes a las ecuaciones de Lagrange,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}, \quad (2.95)$$

a las que hay que añadir $-\sum_I \lambda_I \partial f_I / \partial \dot{q}_\alpha$, y llegamos así a las ecuaciones finales:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \sum_I \lambda_I \frac{\partial f_I}{\partial \dot{q}_\alpha}, \quad (2.96)$$

que son las mismas que las ecuaciones (2.91).

Ejemplo: Disco que rueda sin deslizar en el plano

Las ligaduras (condiciones de rodadura), vienen dadas por, véase la figura 2.2:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 - \dot{\phi} R \cos \psi &= 0, \\ \dot{x}_2 - \dot{\phi} R \sin \psi &= 0, \end{aligned} \quad (2.97)$$

equivalentemente,

$$f_1 = \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 - R^2 \dot{\phi}^2 = 0, \quad (2.98)$$

$$f_2 = \dot{x}_1 \sin \psi - \dot{x}_2 \cos \psi = 0. \quad (2.99)$$

Consideremos I_0 e I_1 , los respectivos momentos de inercia asociados al giro del disco al rodar (ϕ) y al girar sobre sí mismo (ψ), respectivamente. Entonces el Lagrangiano es:

$$L = T - V = \frac{1}{2} I_0 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) \quad (2.100)$$

Aplicando (2.91) obtenemos las ecuaciones de Lagrange para cada coordenada. Pero antes de escribirlas calculemos las siguientes derivadas:

- Coordenada ϕ :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = I_0 \dot{\phi}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial \dot{\phi}} = -2R^2 \dot{\phi}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial \dot{\phi}} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = I_0 \ddot{\phi}.$$

- Coordenada ψ :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_1 \dot{\psi}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial \dot{\psi}} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial \dot{\psi}} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \psi} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_1 \ddot{\psi}.$$

- Coordenada x_1 :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m \dot{x}_1, \quad \frac{\partial f_1}{\partial \dot{x}_1} = 2\dot{x}_1, \quad \frac{\partial f_2}{\partial \dot{x}_1} = \text{sen } \psi, \quad \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m \ddot{x}_1.$$

- Coordenada x_2 :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m \dot{x}_2, \quad \frac{\partial f_1}{\partial \dot{x}_2} = 2\dot{x}_2, \quad \frac{\partial f_2}{\partial \dot{x}_2} = -\text{cos } \psi, \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m \ddot{x}_2.$$

Combinando las derivadas según (2.91) obtenemos las ecuaciones de movimiento:

$$m \ddot{x}_1 = 2\lambda_1 \dot{x}_1 + \lambda_2 \text{sen } \psi, \quad (2.101)$$

$$m \ddot{x}_2 = 2\lambda_1 \dot{x}_2 - \lambda_2 \text{cos } \psi, \quad (2.102)$$

$$I_0 \ddot{\phi} = -2\lambda_1 R^2 \dot{\phi}, \quad (2.103)$$

$$I_1 \ddot{\psi} = 0. \quad (2.104)$$

Multiplicando (2.101) por \dot{x}_1 y (2.102) por \dot{x}_2 , y teniendo en cuenta las condiciones de ligadura (2.98) y (2.99), se deduce:

$$\begin{aligned} \frac{m}{2} \frac{d}{dt} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) &= 2\lambda_1 R^2 \dot{\phi}^2, \\ \frac{m}{2} \frac{d}{dt} (R^2 \dot{\phi}^2) &= 2\lambda_1 R^2 \dot{\phi}^2, \end{aligned} \quad (2.105)$$

$$\boxed{m \ddot{\phi} = 2\lambda_1 \dot{\phi}} \quad (2.106)$$

En la expresión anterior, despejamos $\ddot{\phi}$ a través de (2.103) y agrupamos términos:

$$2\lambda_1 \left(1 + \frac{mR^2}{I_0} \right) = 0$$

Luego:

$$\boxed{\lambda_1 = 0} \quad (2.107)$$

Para λ_2 , multiplicando (2.101) por $\sin \psi$ y (2.102) por $\cos \psi$, tenemos:

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= m (\ddot{x}_1 \sin \psi - \ddot{x}_2 \cos \psi) = m \frac{d}{dt} (\dot{x}_1 \sin \psi - \dot{x}_2 \cos \psi) \\ -m (\dot{x}_1 \cos \psi + \dot{x}_2 \sin \psi) \dot{\psi} &= -m (\dot{x}_1 \cos \psi + \dot{x}_2 \sin \psi) \dot{\psi}, \end{aligned} \quad (2.108)$$

donde hemos tenido en cuenta la ligadura (2.99). Por otra parte, de (2.103)

$$\dot{\psi} = \text{cte.} \quad (2.109)$$

Además:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\dot{x}_1 \cos \psi + \dot{x}_2 \sin \psi) &= -\dot{\psi} \overbrace{(\dot{x}_1 \sin \psi - \dot{x}_2 \cos \psi)}^{0 \rightarrow \text{ligadura (2.99)}} + \\ &+ \underbrace{\ddot{x}_1 \cos \psi + \ddot{x}_2 \sin \psi}_{0 \rightarrow \text{de (2.107) y (2.101), (2.102)}} = 0. \end{aligned} \quad (2.110)$$

Luego insertando (2.110) y (2.109) en (2.108) se sigue que $\lambda_2 = m\mu = \text{constante}$. Sustituyendo $\lambda_1 = 0$ y la expresión anterior para λ_2 en las ecuaciones de movimiento:

$$m\ddot{x}_1 = m\mu \sin \psi \quad (2.111)$$

$$m\ddot{x}_2 = -m\mu \cos \psi \quad (2.112)$$

$$I_0 \ddot{\phi} = 0 \quad (2.113)$$

$$I_1 \ddot{\psi} = 0 \quad (2.114)$$

Integrando las ecuaciones:

$$\phi(t) = \omega t + \phi_0, \quad (2.115)$$

$$\psi(t) = \Omega t + \psi_0, \quad (2.116)$$

$$x_1(t) = -\frac{\mu}{\Omega^2} \sin(\Omega t + \psi_0) + \alpha_1 t + \beta_1, \quad (2.117)$$

$$x_2(t) = \frac{\mu}{\Omega^2} \cos(\Omega t + \psi_0) + \alpha_2 t + \beta_2, \quad (2.118)$$

donde hemos supuesto que $\Omega \neq 0$. Estudiemos a continuación la verificación de las ligaduras. Para ello:

$$\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 = R^2 \dot{\phi}^2, \quad (2.119)$$

implica que,

$$\begin{aligned} \frac{\mu^2}{\Omega^2} + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \frac{2\alpha_1\mu}{\Omega} \cos(\Omega t + \psi_0) - \\ \frac{2\mu\alpha_2}{\Omega} \sin(\Omega t + \psi_0) = R^2 \omega^2, \end{aligned} \quad (2.120)$$

por tanto,

$$2\alpha_1\mu \cos(\Omega t + \psi_0) + 2\mu\alpha_2 \sin(\Omega t + \psi_0) = 0 . \quad (2.121)$$

Supongamos que $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, en este caso μ puede ser distinto de cero, de la ligadura tenemos $\mu^2 = \Omega^2 R^2 \omega^2$, y entonces:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{\mu}{\Omega^2} \sin(\Omega t + \psi_0) + \beta_1 , \\ x_2 &= \frac{\mu}{\Omega^2} \cos(\Omega t + \psi_0) + \beta_2 . \end{aligned} \quad (2.122)$$

La segunda ligadura (2.99) se verifica de forma directa. El movimiento corresponde en este caso a que el disco rueda alrededor del punto (β_1, β_2) con un radio μ/Ω^2 . El valor de μ se puede determinar a partir de las condiciones iniciales que fijan el radio de giro y las velocidades angulares.

En el caso en que $\alpha_1 \neq 0$ y/o $\alpha_2 \neq 0$, entonces $\mu = 0$, y x_1 y x_2 , siguen movimientos lineales:

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \omega t + \phi_0 , \\ \psi(t) &= \Omega t + \psi_0 , \\ x_1 &= \beta_1 + \alpha_1 t , \\ x_2 &= \beta_2 + \alpha_2 t . \end{aligned}$$

Sustituyendo en las ligaduras:

$$\begin{aligned} (2.98) &\Rightarrow \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = R^2 \omega^2 , \\ (2.99) &\Rightarrow \alpha_1 \sin(\Omega t + \psi_0) - \alpha_2 \cos(\Omega t + \psi_0) = 0 , \end{aligned}$$

con lo que

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0 , \quad (2.123)$$

en contra de lo supuesto y este caso no es posible.

Supongamos ahora que $\Omega = 0$. En este caso:

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_0 , \quad \phi = \omega t + \phi_0 , \\ x_1 &= \beta_1 + \alpha_1 t + \frac{1}{2}\mu \sin \psi_0 t^2 , \\ x_2 &= \beta_2 + \alpha_2 t - \frac{1}{2}\mu \cos \psi_0 t^2 . \end{aligned} \quad (2.124)$$

Sustituyendo en (2.98):

$$\begin{aligned} (\alpha_1 + \mu \sin \psi_0 t)^2 + (\alpha_2 - \mu \cos \psi_0 t)^2 &= R^2 \omega^2 , \quad \text{desarrollando,} \\ \mu^2 t^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\mu\alpha_1 \sin \psi_0 t - 2\alpha_2\mu \cos \psi_0 t &= R^2 \omega^2 , \end{aligned} \quad (2.125)$$

de donde se sigue que $\mu = 0$. Por lo que tenemos un movimiento de rodadura lineal, es decir, a lo largo de una dirección fija.

$$\begin{aligned} x_1 &= \beta_1 + \alpha_1 t , \\ x_2 &= \beta_2 + \alpha_2 t . \end{aligned} \quad (2.126)$$

Observando de nuevo (2.99), llegamos a la relación trivial:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \cot \psi_0 . \quad (2.127)$$

2.13. Variables ignorables o cíclicas

Supongamos que el Lagrangiano no depende de una coordenada q_j . Entonces dicha variable se llama ignorable o cíclica.

En este supuesto, el momento generalizado o conjugado $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$ es una constante de movimiento puesto que de las ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned} \frac{dp_j}{dt} &= \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \\ p_j &= \text{cte.} = c_j. \end{aligned}$$

Así \dot{q}_j se puede despejar en función de c_j y del resto de coordenadas y velocidades generalizadas (sin involucrar a q_j , ya que no aparece),

$$c_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \rightarrow \dot{q}_j = \dot{q}_j(c_j, q, \dot{q}, t), \text{ sin } q_j \text{ ni } \dot{q}_j. \quad (2.128)$$

Supongamos que exista una sola coordenada cíclica (la generalización a más de una coordenada cíclica es trivial), y llamémosla q_n :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = c_n, \quad (2.129)$$

$$\dot{q}_n = \dot{q}_n(q_1, \dots, q_{n-1}; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{n-1}; c_n; t). \quad (2.130)$$

Donde quiera que encontremos \dot{q}_n o \ddot{q}_n en las ecuaciones de Lagrange derivadas a partir del Lagrangiano $L(q_1, \dots, q_{n-1}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)$ con n -grados de libertad, las sustituimos por (2.130), o su derivada, y resolvemos el problema con $n - 1$ grados de libertad. Una vez resuelto, podemos integrar (2.130) y obtener así $q_n(t)$ por cuadratura. Este procedimiento es, sin embargo, a posteriori.

Nos podemos preguntar si podríamos eliminar el grado de libertad n -ésimo, esto es, q_n , antes de escribir las ecuaciones de movimiento, mediante el empleo de un Lagrangiano adecuado en términos de sólo $(n - 1)$ -grados de libertad, esto es, de q_1, q_2, \dots, q_{n-1} y sus derivadas primeras.

En la acción,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \dots, q_{n-1}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) dt,$$

sustituimos \dot{q}_n en función del resto de coordenadas y velocidades generalizadas despejando de:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = c_n = \text{cte.} \quad (2.131)$$

Al hacer esto para toda trayectoria, q_n es entonces función del resto de coordenadas generalizadas, al hallarlo por cuadratura de integrar (2.131). Así δq_n no será nulo en general en t_1 ni en t_2 cuando se halle la variación de la acción tomando $\delta q_k(t_{1,2}) = 0$ para $k = 1, \dots, n - 1$. Efectivamente,

$$\begin{aligned} q_n(t) &= \int_{t_1}^t \dot{q}_n(q_1, \dots, q_{n-1}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{n-1}, t') dt', \\ \delta q_n(t) &= \int_{t_1}^t \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial \dot{q}_n}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial \dot{q}_n}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt', \end{aligned} \quad (2.132)$$

y $\delta\dot{q}_i(t_{1,2}) \neq 0$ en general, y, por lo tanto, tampoco lo será $\delta q_n(t_{1,2})$. En consecuencia, δS a lo largo de la trayectoria que minimiza la acción viene dada por:⁸

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \dots, q_{n-1}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) dt = [p_n \delta q_n]_{t_1}^{t_2} . \quad (2.133)$$

Con $p_n = c_n = \text{constante}$. El resultado (2.133) puede también expresarse como:

$$[p_n \delta q_n]_{t_1}^{t_2} = p_n \delta \int_{t_1}^{t_2} \dot{q}_n dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} p_n \dot{q}_n dt . \quad (2.134)$$

Esto nos lleva a la ecuación de extremos:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (L - p_n \dot{q}_n) dt = 0 , \quad (2.135)$$

con el nuevo Lagrangiano dado por:

$$\boxed{\bar{L}(q_1, \dots, q_{n-1}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{n-1}, t) = L(q_1, \dots, q_{n-1}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) - c_n \dot{q}_n} \quad (2.136)$$

Recordemos que $\dot{q}_n = \dot{q}_n(q_1, \dots, q_{n-1}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{n-1}; c_n; t)$ y por tanto $q_n(t)$ se obtiene por cuadratura una vez obtenidos $q_1(t), \dots, q_{n-1}(t)$. Es importante resaltar que las ecuaciones de Lagrange deducidas a partir de \bar{L} no contienen ni q_n ni \dot{q}_n y directamente corresponden a un problema de $n - 1$ grados de libertad. Esto justifica de forma clara el que las coordenadas q_n se llamen “ignorables”.

En el caso de varias variables, la generalización es:

$$\bar{L} = L - \sum_k c_k \dot{q}_k . \quad (2.137)$$

Esquemáticamente el proceso a seguir para eliminar una variable cíclica mediante este método general es:

1. Escribir la ecuación para la variable cíclica:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = c_n = \text{cte.} \quad (a)$$

2. Intercambiar el Lagrangiano dado por \bar{L} :

$$\bar{L} = L - c_n \dot{q}_n \quad (b)$$

⁸Notemos que esta variación se toma sólo con respecto a $n - 1$ grados de libertad independientes y no respecto a n como en el problema original, aunque, como en éste, sean las n coordenadas las que cambian en el proceso de minimización, ya que, $q_n(t)$ es función de $q_k(t)$ para $k = 1, \dots, n - 1$, a partir de (2.131). Por eso, a lo largo de la trayectoria real del sistema se obtiene (2.133) en lugar de 0, que se obtenía cuando los δq_n también eran nulos en los extremos.

3. Eliminar la velocidad \dot{q}_n resolviendo la ecuación (a) para \dot{q}_n y sustituyendo en (b). El nuevo Lagrangiano ya no depende de la variable cíclica y el problema variacional original de n grados de libertad se reduce a otro nuevo de $n - 1$ grados de libertad. La variable cíclica queda entonces como:

$$\dot{q}_n = \dot{q}_n(q_1, \dots, q_{n-1}; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{n-1}; c_n; t)$$

Siguiendo el anterior procedimiento podemos realizar un ejemplo sencillo, que obtenemos considerando la energía cinética dada por (1.65) y suponiendo además que la coordenada q_n es cíclica y, por lo tanto, los coeficientes que multiplican las derivadas en (1.65) son independientes de q_n . Entonces:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n-1} a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k + \sum_{i=1}^{n-1} a_{in} \dot{q}_i \dot{q}_n + \frac{1}{2} a_{nn} \dot{q}_n^2, \quad (2.138)$$

con el Lagrangiano:

$$L = T - V(q_1, \dots, q_{n-1}, t). \quad (2.139)$$

El primer paso para eliminar las coordenadas cíclicas es identificarlas y calcular los momentos generalizados asociadas a ellas mediante las ecuaciones de Lagrange:

$$p_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} = \sum_{i=1}^{n-1} a_{in} \dot{q}_i + a_{nn} \dot{q}_n = \sum_{i=1}^n a_{in} \dot{q}_i = c_n. \quad (2.140)$$

Despejando de aquí \dot{q}_n , en función del resto de coordenadas y momentos generalizados, tenemos:

$$\dot{q}_n = -\frac{1}{a_{nn}} \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_{in} \dot{q}_i - p_n \right) \quad (2.141)$$

Ahora ya podemos calcular el nuevo Lagrangiano, en el que se han eliminado las coordenadas cíclicas. Para ello hacemos uso de (2.136):

$$\begin{aligned} \bar{L} = L - p_n \dot{q}_n &= \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n-1} a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k - \frac{1}{2a_{nn}} \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{in} a_{jn} \dot{q}_i \dot{q}_j - \\ &\quad - \frac{1}{2a_{nn}} c_n^2 + \frac{c_n}{a_{nn}} \sum_{i=1}^{n-1} a_{in} \dot{q}_i - V. \end{aligned} \quad (2.142)$$

Obtenemos términos lineales en \dot{q}_i y el término de potencial $c_n^2/2a_{nn}$. La aparición del término lineal en \bar{L} , $\sum_i a_{in} \dot{q}_i c_n$ se llama un "acoplo cinético" dado que involucra las velocidades. El nuevo término cuadrático en las velocidades se puede considerar simplemente como una modificación de la energía cinética original.

En particular, el término $c_n^2/2a_{nn}(q_1, \dots, q_{n-1})$, es famoso por aparecer en la llamada mecánica sin fuerzas de Hertz ("powerless dynamics"). En sus últimos años, Hertz intentó elaborar la Mecánica

prescindiendo de la noción de fuerza, de forma que toda energía potencial pudiese ser derivada a partir de la presencia de variables “microscópicas” ignorables a través de los términos de potencial del tipo $c_n^2/2a_{nm}$. De este modo desaparecería la dualidad existente en mecánica entre energía cinética y potencial. Hertz murió en Bonn el 1 de Enero de 1894, poco después de terminar su obra *Sobre los principios de la Mecánica*⁹, en la que exponía estas ideas.

2.14. El tiempo como variable cíclica o ignorable: el principio de Jacobi y el principio de mínima acción

Sea un sistema cuyo Lagrangiano no contiene el tiempo explícitamente. No tomamos t como variable independiente, sino que todas las $n + 1$ variables q_1, \dots, q_n y t se toman como función de un parámetro τ . El sistema tiene ahora $n + 1$ grados de libertad. Con el cambio:

$$\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt} = \frac{dq_i}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{q'_i}{t'} , \quad (2.143)$$

la acción viene dada por:

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} L(q_1, \dots, q_n, \frac{q'_1}{t'}, \dots, \frac{q'_n}{t'}) t' d\tau . \quad (2.144)$$

Es directo comprobar que las ecuaciones de movimiento en la variable τ obtenidas a partir de la acción anterior imponiendo que $\delta S = 0$ con las condiciones $\delta q_i(\tau_1) = \delta q_i(\tau_2) = 0$, $i = 1, \dots, n$ y $\delta t(\tau_1) = \delta t(\tau_2) = 0$, son,

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 , \quad (2.145)$$

con L el Lagrangiano original, es decir, se recuperan las ecuaciones de Lagrange asociadas a las coordenadas generalizadas. Para la nueva variable t tenemos:

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial(L(q, q'/t')t')}{\partial t'} - \frac{\partial(Lt')}{\partial t} = \frac{d}{d\tau} \frac{\partial(L(q, q'/t')t')}{\partial t'} = 0 , \quad (2.146)$$

que es equivalente a que:

$$\frac{dH}{d\tau} = 0 , \quad (2.147)$$

así la conservación de la energía se obtiene como una ecuación de movimiento más. Vemos por tanto que las ecuaciones de movimiento deducidas a partir de hacer estacionario (2.144) son equivalentes a las ecuaciones de Lagrange obtenidas a partir del principio de Hamilton. En (2.146) y (2.147) se ha tenido en cuenta que:

$$p_t = \frac{\partial(Lt')}{\partial t'} = L - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{q'_i}{t'} = L - \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i = -H , \quad (2.148)$$

⁹Hertz, H., (1894). *The Principles of Mechanics, Presented in a New Form*. Dover, Nueva York, 1956.

habiendo obtenido el resultado de que $p_t = H = cte$.

La variable t puede ser eliminada mediante las técnicas desarrolladas en la sección anterior al tratar con variables cíclicas o ignorables y reducir así el problema a n grados de libertad. Se obtiene de este modo un principio variacional que determina el movimiento en el espacio, pero no da, de forma directa, la dependencia temporal de dicho movimiento. Por supuesto, ésta siempre se puede deducir una vez conocido $\tau = \tau(t)$.

El nuevo Lagrangiano viene dado en virtud de (2.136) por,

$$\bar{L} = Lt' - p_t t' = (L - p_t) t' = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i t' . \quad (2.149)$$

Por lo tanto:

$$\bar{S} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i t' d\tau , \quad (2.150)$$

con t' expresada en términos del resto de variables despejándola de (2.148). Por ser t variable cíclica no existe dependencia temporal explícita en la energía cinética y entonces siempre se puede tomar como una función cuadrática en \dot{q}_i , recordar (1.65). De esta forma:

$$\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i t' = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i t' = 2Tt' . \quad (2.151)$$

Luego podemos reescribir (2.150) como:

$$\bar{S} = 2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} Tt' d\tau = 2 \int_{t_1}^{t_2} T dt , \quad (2.152)$$

recordando una vez más que t no es una variable independiente sino que se obtiene de integrar $t'(\tau)$ obtenida a partir de $p_t = -E = \partial(Lt')/\partial t' = -T(q, \dot{q}) - V(q) = \text{constante}$. Buscar los extremos de (2.152), teniendo en cuenta que el tiempo no es una variable independiente, se conoce como *el principio de mínima acción*. La ecuación $E = T + V$ es justo la ecuación adicional necesaria para hallar t' en función del resto de variables.

Para obtener t como función de τ , consideremos la expresión de la energía cinética:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k .$$

T es invariante y además independiente del sistema de coordenadas utilizado. Introduzcamos en el espacio de configuración una métrica tal que el elemento infinitesimal de longitud viene dado por:

$$d\bar{s}^2 = \sum_{i,k} a_{ik} dq_i dq_k . \quad (2.153)$$

La energía cinética puede entonces expresarse en la forma,

$$T = \frac{1}{2} \frac{d\bar{s}^2}{dt^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{s}}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{s}}{d\tau} \right)^2 \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2t'^2} \left(\frac{d\bar{s}}{d\tau} \right)^2 . \quad (2.154)$$

Despejando t' , escribiendo $T = E - V$, llegamos a:

$$t' = \frac{1}{\sqrt{2T}} \frac{\overline{ds}}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{2(E-V)}} \frac{\overline{ds}}{d\tau} . \quad (2.155)$$

Volviendo de nuevo a (2.152):

$$\overline{S} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{2T}{\sqrt{2T}} \frac{\overline{ds}}{d\tau} d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{2T} \overline{ds} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \underbrace{\sqrt{2(E-V)}}_{\frac{d\sigma}{d\tau}} \overline{ds} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \overline{d\sigma} \quad (2.156)$$

La notación anterior puede dar lugar a la confusión de que $\overline{S} = \sigma(\tau_2) - \sigma(\tau_1)$, sin embargo $\overline{d\sigma}$ no es la diferencial de ninguna función de punto $\overline{S}(q)$ ya que depende del camino recorrido. Por eso se ha incluido la raya sobre $d\sigma$.

Véase que en (2.156) el tiempo ha desaparecido por completo. El parámetro τ puede ser incluso una de las coordenadas. Siempre hay que elegir un parámetro para caracterizar la curva en el espacio de configuración. Este parámetro puede ser q_n , por ejemplo, dando todas las demás variables como función de q_n . Esto reduce el problema variacional de n a $n - 1$ variables (trayectoria). El principio de minimizar la acción \overline{S} escrita según (2.156) para encontrar la trayectoria del sistema mecánico se llama *principio de Jacobi o de Maupertuis*.

Para hallar la dependencia temporal habría que integrar:

$$dt' = \frac{1}{\sqrt{2(E-V)}} \overline{ds} , \quad (2.157)$$

con lo que se obtiene cómo se mueve el sistema en el tiempo. Para el caso de una sola partícula:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2, \quad \overline{ds}^2 = m d\vec{r}^2 = m \sum_{i,k} a_{ik} dq_i dq_k . \quad (2.158)$$

La última ecuación representa el elemento de línea del espacio ordinario tridimensional expresado en coordenadas curvilíneas. El principio de Jacobi nos dice que:

$$\overline{S} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{2(E-V)} \overline{ds} , \quad (2.159)$$

debe ser un mínimo para la trayectoria real de la partícula (como es bien sabido, para su derivación sólo hemos impuesto que sea un extremo).¹⁰

Así, la aplicación del principio de la mínima acción surge como resultado de los siguientes pasos:

- 1) $T' = T t'^2$,
- 2) $\overline{S} = 2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{T'}{t'} d\tau$,

¹⁰Obsérvese que este problema es análogo al que también nos encontramos en óptica, en el Principio de Fermat se ha de minimizar $I = \int_{\tau_1}^{\tau_2} n \overline{ds}$, que determina el camino óptico, con n el índice de refracción del medio. Por otro parte, esta analogía jugó un papel fundamental en el desarrollo de la mecánica ondulatoria.

$$3) \frac{T'}{t'^2} + V = E .$$

La ligadura 3) la podemos tratar también introduciendo los multiplicadores de Lagrange, de forma que ahora t' es una variable independiente del resto:

$$\bar{S} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left\{ 2 \frac{T'}{t'} + \lambda \left(\frac{T'}{t'^2} + V \right) \right\} d\tau , \quad (2.160)$$

e imponiendo que $\delta \bar{S} = 0$. Minimizando respecto de t' obtenemos,

$$-2 \frac{T'}{t'^2} - 2 \frac{\lambda}{t'^3} T' = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda(\tau) = -t'} \quad (2.161)$$

Sustituyendo en (2.160) tenemos:

$$\bar{S} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(\frac{T'}{t'^2} - V \right) t' d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} (T - V) t' d\tau = \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt . \quad (2.162)$$

Como ya hemos minimizado respecto de t' , la acción anterior debe ser minimizada respecto del resto de n coordenadas generalizadas q_n , tal que $\delta q_n = 0$ en t_1 y t_2 . De este modo, a partir del principio de la mínima acción hemos recuperado el *principio de Hamilton*, desde el que habíamos partido. Se muestra así la equivalencia entre los principios de Hamilton, mínima acción y de Jacobi.

2.15. Pequeñas vibraciones alrededor de un punto de equilibrio

En este capítulo trataremos una teoría muy general aplicable al movimiento de un sistema alrededor de su posición de equilibrio cuando éste sea perturbado ligeramente.

Recordemos nuestra métrica en el espacio de configuración:

$$d\bar{s}^2 = \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(q) dq_i dq_k . \quad (2.163)$$

Si no abandonamos la proximidad del punto de equilibrio, los coeficientes simétricos $a_{ik}(q)$ se pueden tomar como constantes. Esto es, que los a_{ik} se pueden aproximar a sus valores en el punto de equilibrio $a_{ik}(P)$. El punto P de equilibrio siempre lo hacemos corresponder con $q_i = 0$. En lo que sigue los coeficientes $a_{ik}(P)$ los consideraremos como constantes en todo el espacio de configuración, aún cuando sepamos que sólo lo podemos hacer, en general, para puntos muy próximos a P .

Al ser los a_{ik} constantes, nuestras coordenadas no son curvilíneas sino rectilíneas. Este espacio es pues, plano.

La forma cuadrática finita:

$$s^2 = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} q_i q_k , \quad (2.164)$$

tiene una simple interpretación geométrica: se trata del cuadrado de la distancia del punto $P = (0, \dots, 0)$ al punto $Q = (q_1, \dots, q_n)$. Podemos pensar en un espacio Euclídeo n -dimensional con un conjunto linealmente independiente de vectores:

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \vec{u}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.165)$$

de modo que dado un \vec{R} , éste puede ser expresado como:

$$\vec{R} = q_1 \vec{u}_1 + \dots + q_n \vec{u}_n \equiv \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}. \quad (2.166)$$

Consideremos ahora dos puntos diferentes Q y Q' y construimos los vectores:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= \vec{R} = q_1 \vec{u}_1 + \dots + q_n \vec{u}_n, \\ \overrightarrow{PQ'} &= \vec{R}' = q'_1 \vec{u}_1 + \dots + q'_n \vec{u}_n. \end{aligned} \quad (2.167)$$

El producto escalar de estos dos vectores viene dado por,

$$\vec{R} \cdot \vec{R}' = \sum_{i,k} a_{ik} q_i q'_k, \quad (2.168)$$

que es una aplicación bilineal. Por definición, cuando se anule el producto escalar se dice que los dos vectores son ortogonales entre sí. Dicho producto escalar, a partir de (2.166), también se puede expresar como:

$$\vec{R} \cdot \vec{R}' = \sum_{i,k} (\vec{u}_i \cdot \vec{u}_k) q_i q'_k, \quad (2.169)$$

con lo que $a_{ik} = a_{ki} = \vec{u}_i \cdot \vec{u}_k$, como también se puede demostrar directamente de la definición de producto escalar (2.168) y de (2.165).

El producto de \vec{R} consigo mismo:

$$\vec{R}^2 = \sum_{i,k=1}^n (\vec{u}_i \cdot \vec{u}_k) q_i q_k = s^2, \quad (2.170)$$

que es la norma al cuadrado de \vec{R} , y como a_{ik} es una forma cuadrática definida positiva resulta que dicha cantidad será positiva, y sólo cero cuando $\vec{R} = 0$.

Dada una métrica simétrica, definida positiva y de determinante no nulo siempre es posible hacer un cambio de base tal que en efecto $a_{ik} = \delta_{ik}$. En tal caso, los \vec{u}_i son vectores mutuamente perpendiculares de longitud unidad y constituyen una base ortonormal,

$$\vec{u}_i \cdot \vec{u}_k = \delta_{ik} . \quad (2.171)$$

Y el cuadrado de la distancia toma la forma canónica:

$$s^2 = q_1^2 + \cdots + q_n^2 , \quad (2.172)$$

entonces hablamos también de coordenadas rectangulares. Como consecuencia, dados dos puntos P y Q su distancia no es nula a no ser que $P = Q$. Esto implica que la forma cuadrática (2.164) es una forma definida positiva para cualquier valor de q_i .

En el espacio de configuración esta condición se cumple ya que la energía cinética que determina el elemento de línea (2.163), y con ello la distancia (2.164), nunca puede ser negativa, y además sólo puede anularse cuando todos los dq_i se cancelen. Esto garantiza el carácter definido positivo de la métrica a_{ik} .

Volvamos a nuestro problema físico de pequeñas oscilaciones. Sea $V(q_1, \dots, q_n)$ la energía potencial de nuestro sistema físico. Haciendo un desarrollo de Taylor de esta función en las proximidades del punto de equilibrio ($q_i = 0$):

$$V = V_0 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial V}{\partial q_i} \right)_0 q_i + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_k} \right)_0 q_i q_k + \dots \quad (2.173)$$

Nuestro punto de equilibrio está en el origen, por hipótesis. Por tanto, V debe ser tal que:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial q_i} \right)_0 = 0 . \quad (2.174)$$

Además si el potencial tiene de hecho un mínimo en $q_i = 0$ se debe cumplir que

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_k} \right)_0 , \quad (2.175)$$

sea una forma cuadrática definida positiva, aunque esta condición no la impondremos en nuestros siguientes desarrollos.

Los términos constantes en el potencial, como sabemos, no influyen en las ecuaciones de movimiento y pueden ser eliminados. De este modo el desarrollo *comienza* con el término de segundo orden. Esto es:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i,k}^n \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_k} \right)_0 q_i q_k = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n b_{ik} q_i q_k , \quad (2.176)$$

con :

$$b_{ik} = b_{ki} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_k} \right)_0 . \quad (2.177)$$

Consideremos la ecuación $V(q) = 1/2$, que se escribe como:

$$\sum_{i,k=1}^n b_{ik}q_iq_k = 1 . \quad (2.178)$$

Geoméricamente nos define una superficie de segundo orden en el espacio n -dimensional de configuración. Podemos encontrar los ejes principales de dicha superficie determinando aquellos puntos cuyas distancias desde el origen (el punto de equilibrio) son extremos (valores estacionarios). Entonces nuestro problema es encontrar los valores estacionarios de

$$s^2 = \sum_{i,k=1}^n a_{ik}q_iq_k , \quad (2.179)$$

con la condición auxiliar:

$$\sum_{i,k=1}^n b_{ik}q_iq_k = 1 . \quad (2.180)$$

Empleamos el método de los multiplicadores de Lagrange, y procedemos a minimizar la función¹¹:

$$G(q_1, \dots, q_n) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik}q_iq_k - \frac{1}{\lambda} \sum_{i,k=1}^n b_{ik}q_iq_k \quad (2.181)$$

Multiplicando por λ , nuestro problema es equivalente a minimizar:

$$-\lambda G(q_1, \dots, q_n) = F(q_1, \dots, q_n) = \sum_{i,k=1}^n b_{ik}q_iq_k - \lambda \sum_{i,k=1}^n a_{ik}q_iq_k . \quad (2.182)$$

Con lo que nuestro problema de encontrar los ejes se puede reinterpretar como el de encontrar los valores estacionarios de la función,

$$2V = \sum_{i,k=1}^n b_{ik}q_iq_k , \quad (2.183)$$

bajo la condición:

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik}q_iq_k = 1 . \quad (2.184)$$

Esta condición auxiliar significa que estamos en una esfera de radio unidad. En cada punto de esta esfera la energía potencial V posee un cierto valor. Nuestro problema es hallar los puntos Q_i de la esfera unidad para los que V es estacionario.

¹¹ Aquí hemos sustituido nuestra notación habitual de λ por $-1/\lambda$.

Por lo tanto:

$$\delta F = 2 \sum_{i,k=1}^n b_{ki} \delta q_k q_i - 2\lambda \sum_{i,k=1}^n a_{ki} \delta q_k q_i = 0 , \quad (2.185)$$

$$\sum_{i=1}^n b_{ki} q_i - \lambda \sum_{i=1}^n a_{ki} q_i = 0 . \quad (2.186)$$

De este modo obtenemos las siguientes ecuaciones lineales:

$$\begin{array}{cccc} b_{11}q_1 + \dots + b_{1n}q_n & = & \lambda(a_{11}q_1 + \dots + a_{1n}q_n) & \\ \cdot & & \cdot & \\ \cdot & & \cdot & \\ \cdot & & \cdot & \\ b_{n1}q_1 + \dots + b_{nn}q_n & = & \lambda(a_{n1}q_1 + \dots + a_{nn}q_n) & \end{array} \quad (2.187)$$

La condición necesaria para poder obtener una solución q_i no trivial viene dada por la ecuación característica, que nos permite obtener los λ ,

$$\begin{vmatrix} b_{11} - \lambda a_{11} & \dots & b_{1n} - \lambda a_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ b_{n1} - \lambda a_{n1} & \dots & b_{nn} - \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = 0 . \quad (2.188)$$

Ésta es una ecuación algebraica de grado n en λ y en general tendremos n -raíces:

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n . \quad (2.189)$$

Es posible que algunas de las raíces sean iguales (raíces múltiples y diremos entonces que se trata de un caso degenerado). Supondremos en lo que sigue que es posible eliminar estos casos modificando los coeficientes b_{ik} y a_{ik} por pequeñas cantidades infinitesimales, y tomando después el paso al límite, en el buen entendimiento de que esto no es siempre posible. De esta forma consideraremos en lo que sigue que todas las λ_i son distintas unas de otras (caso no degenerado).

Para cada λ_i tenemos un vector $\vec{p}_i = (q_1^{(i)}, \dots, q_n^{(i)})$ que está definido salvo signo al imponer normalización a la unidad, $\vec{p}_i \vec{p}_i = 1$. Este vector recibe el nombre del i -ésimo *eje principal* de la superficie (2.180). En total, tenemos un conjunto de n ejes principales $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n$ correspondientes a los n valores característicos (2.188).

Los ejes principales poseen las siguientes propiedades:

1. Las raíces λ_i son invariantes con respecto a transformaciones lineales arbitrarias de las coordenadas q_i .

Multiplicando la ecuación (2.186) por q_k y sumando en k , tenemos:

$$\sum_{i,k=1}^n b_{ik} q_i q_k = 2V = \lambda ,$$

con λ cualquiera de las raíces λ_i . También hemos considerado (2.184). Dado que cualquier transformación general de coordenadas deja invariante V (en particular las lineales), tenemos que los λ_i son invariantes.

2. Las raíces son todas reales, y de este modo los ejes principales son n vectores reales del espacio euclídeo n -dimensional.

Aunque en principio podríamos suponer que son complejos, resultan ser reales por la simetría de los coeficientes $a_{ik} = a_{ki}$ y $b_{ik} = b_{ki}$. De nuevo, de (2.186), tomamos complejos conjugados:

$$\sum_{i,k=1}^n b_{ik} q_k^* = \lambda^* \sum_{i,k=1}^n a_{ik} q_k^* . \quad (2.190)$$

Multiplicando (2.186) por q_i^* y la expresión anterior por q_i y restando, obtenemos:

$$(\lambda - \lambda^*) \sum_{i,k=1}^n a_{ik} q_i q_k^* = 0 . \quad (2.191)$$

Haciendo uso de la simetría de los coeficientes tenemos:

$$(\lambda - \lambda^*) \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n a_{ik} (q_i q_k^* + q_i^* q_k) = 0 . \quad (2.192)$$

Tomando q_i y q_k como números complejos de forma explícita:

$$\begin{aligned} q_i &= \alpha_i + i\beta_i , \\ q_k &= \alpha_k + i\beta_k , \end{aligned}$$

y desarrollando resulta,

$$(\lambda - \lambda^*) \sum_{i,k=1}^n a_{ik} (\alpha_i \alpha_k + \beta_i \beta_k) = (\lambda - \lambda^*) (s_1^2 + s_2^2) = 0 , \quad (2.193)$$

donde

$$s_1^2 = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \alpha_i \alpha_k , \quad s_2^2 = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \beta_i \beta_k . \quad (2.194)$$

De esta forma, y dado que a_{ik} es una forma cuadrática definida positiva, (2.193) se verificará sólo si:

$$\lambda = \lambda^* . \quad (2.195)$$

Luego, $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. *Los ejes principales son ortogonales entre sí*

Supongamos ahora que λ_1 y λ_2 son dos raíces distintas con ejes principales \vec{p} y \vec{p}' , respectivamente. Seguimos los mismos pasos del punto anterior realizando los intercambios, $\lambda \rightarrow \lambda_1$, $\lambda^* \rightarrow \lambda_2$ y $q_i^* \rightarrow q'_i$, con $q_i(q'_i)$ las coordenadas de $\vec{p}(\vec{p}')$, respectivamente. De este modo, en lugar de (2.191) llegamos a:

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik} q_i q'_k = 0 . \quad (2.196)$$

De acuerdo con (2.169) esta ecuación podemos reescribirla como:

$$\vec{p} \cdot \vec{p}' = 0 \quad (2.197)$$

Lo que determina que \vec{p} y \vec{p}' son ortogonales, y por tanto linealmente independientes, por corresponder a raíces distintas.

4. *Los \vec{p}_i son reales y forman una base ortonormal del espacio Euclídeo n -dimensional.*

De nuevo, a partir de (2.186) tomamos el complejo conjugado:

$$\sum_{i,k=1}^n b_{ik} q_k^* = \lambda \sum_{i,k=1}^n a_{ik} q_k^* . \quad (2.198)$$

Así \vec{p}_i y \vec{p}_i^* pertenecen a la misma raíz. Como suponemos que ésta no es degenerada, se sigue que:

$$\vec{p}_i^* = \alpha \vec{p}_i . \quad (2.199)$$

Donde $\alpha \in \mathbb{R}$, con $\alpha = \pm 1$ para que así $\vec{p}_i^* \vec{p}_i^* = 1$. Así, si $\alpha = +1$ entonces el correspondiente \vec{p}_k es real y si $\alpha = -1$ entonces es imaginario puro y por tanto $i \vec{p}_k$ es real. En definitiva, los autovectores siempre se pueden tomar reales tal y como se quería probar.

Como el espacio es n -dimensional queda claro que los vectores \vec{p}_i , $i = 1, \dots, n$ constituyen una base ortonormal del espacio de configuración.

Tomemos los n ejes principales así determinados como los nuevos ejes del sistema de referencia, que ahora es rectangular. El eje principal para un λ_i dado en la base original viene dada por:

$$\vec{p}_i = (\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{in}) . \quad (2.200)$$

Entonces, tenemos que:

$$\vec{OQ} = \sum_{i=1}^n (\vec{p}_i \cdot \vec{OQ}) \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n \underbrace{(\vec{p}_i \cdot \vec{OQ})}_{u_i} (\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{in}) . \quad (2.201)$$

Siendo las $u_i = \vec{p}_i \cdot \overrightarrow{OQ}$ las nuevas coordenadas en el sistema de referencia rectangular. De la expresión anterior resulta la siguiente relación entre las viejas coordenadas q_i de \overrightarrow{OQ} y las nuevas:

$$\begin{aligned} q_1 &= u_1\alpha_{11} + u_2\alpha_{12} + \dots + u_n\alpha_{1n} , \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ q_n &= u_1\alpha_{n1} + u_2\alpha_{n2} + \dots + u_n\alpha_{nn} . \end{aligned} \quad (2.202)$$

Con esta transformación la distancia de un punto Q al origen viene dada por:

$$s^2 = u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2 . \quad (2.203)$$

Es decir $a_{ik} \rightarrow \delta_{ik}$, adoptando la forma canónica. Por tanto, operamos con coordenadas cartesianas ordinarias.

Veamos qué ocurre con nuestra energía potencial V a consecuencia de nuestra transformación. En principio sólo sabíamos que V debía ser una forma cuadrática:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n b'_{ik} u_i u_k . \quad (2.204)$$

Si planteamos en nuestro nuevo sistema de referencia las ecuaciones (2.186), tenemos:

$$\sum_{i,k=1}^n b'_{ik} u_k = \lambda u_i , \quad (2.205)$$

junto con la condición auxiliar:

$$\sum_{k=1}^n u_k^2 = 1 . \quad (2.206)$$

Los valores λ de (2.205) pueden ser identificados con los valores λ obtenidos previamente, pues éstos son invariantes bajo una transformación lineal. Notemos que (2.205) en el nuevo sistema de coordenadas se reduce a un problema ordinario de autovalores y autovectores. Más aún, en el nuevo sistema de referencia, dado que la misma base está formada por los ejes principales sabemos la solución a (2.205), los mismos vectores que forman la base. Así b'_{ik} es diagonal en esta base tal que $b'_{ii} = \lambda_i$. Luego la energía potencial asume en el nuevo sistema de referencia la forma diagonal:

$$V = \frac{1}{2} (\lambda_1 u_1^2 + \lambda_2 u_2^2 + \dots + \lambda_n u_n^2) . \quad (2.207)$$

Así que no sólo hemos obtenido que el cuadrado de la distancia s^2 asume una forma diagonal, sino también que V es diagonal en el mismo sistema de coordenadas y hemos diagonalizado simultáneamente dos formas cuadráticas simétricas, siendo una de ellas definida positiva (a_{ik}). La energía cinética T adopta la forma:

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} (\dot{u}_1^2 + \dots + \dot{u}_n^2) . \quad (2.208)$$

Las ecuaciones de movimiento se simplifican, pasando a ser ecuaciones diferenciales de segundo orden independientes para cada coordenada:

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1 + \lambda_1 u_1 &= 0, \\ \cdot & \quad \cdot \\ \cdot & \quad \cdot \\ \ddot{u}_n + \lambda_n u_n &= 0, \end{aligned} \tag{2.209}$$

de solución,

$$u_i = A_i \cos \sqrt{\lambda_i} t + B_i \sen \sqrt{\lambda_i} t, \quad i = 1, \dots, n, \tag{2.210}$$

con A_i y B_i , constantes de integración.

Hay que distinguir dos casos:

1. *Todas las λ_i son positivas.*

El sistema oscila alrededor del punto de equilibrio P que es un mínimo del potencial, dado que (2.175) es una forma cuadrática definida positiva al ser todos sus autovalores positivos. Las oscilaciones ocurren a lo largo de los eje principales, con frecuencias $\nu_i = \sqrt{\lambda_i}$ y se superponen en modos normales (por ser cada vibración independiente una de la otra), dando lugar al movimiento total. Las ν_i cambian de eje a eje y se habla del espectro de vibraciones normales. En este caso hablamos de *equilibrio estable*.

Como ya se ha indicado, el requisito de que (2.175) sea una forma cuadrática positiva no es necesario en las demostraciones anteriores donde sólo se ha considerado a_{ik} como forma cuadrática definida positiva.

2. *Al menos una de las raíces características λ_i es negativa o nula.*

Esto ocurre cuando la forma (2.175) no es definida positiva. En este caso sea $\lambda_j \leq 0$, entonces definimos $\nu_i = \sqrt{-\lambda_i}$, y resolviendo la ecuación de movimiento correspondiente de (2.209), tenemos:

$$u_i = Ae^{\nu_i t} + Be^{-\nu_i t} \tag{2.211}$$

Es decir, deja de ser una solución periódica y tiene un comportamiento *exponencial*. El más mínimo impulso a lo largo del j -ésimo eje ($\lambda_j < 0$) es suficiente para producir un movimiento que se aleja exponencialmente del punto de equilibrio con el tiempo. En este caso hablamos de *equilibrio inestable*.¹²

¹²Para $\nu_i = 0$ entonces la solución es $u_i = A_i t + B_i$.

Capítulo 3

Teoría de Hamilton

3.1. Transformaciones de Legendre

El matemático francés Legendre (1752-1833) descubrió una importante transformación en sus estudios conectados con la solución de ecuaciones diferenciales.

Sea F una función de n variables u_1, \dots, u_n , y v_1, \dots, v_n sus derivadas:

$$v_i = \frac{\partial F}{\partial u_i} . \quad (3.1)$$

Asumimos que el Hessiano:

$$\left\| \frac{\partial^2 F}{\partial u_i \partial u_j} \right\| \neq 0 . \quad (3.2)$$

Lo que garantiza la independencia de las variables v_i . En este caso las ecuaciones (3.1) son invertibles y podemos obtener:

$$v_i = v_i(u_1, \dots, u_n), \quad u_j = u_j(v_1, \dots, v_n) . \quad (3.3)$$

Definamos una nueva función G :

$$G(v_1, \dots, v_n) = \sum_{i=1}^n u_i(v) v_i - F(u(v)) . \quad (3.4)$$

donde las variables u_i están dadas en función de las v_i . Consideremos una variación infinitesimal arbitraria de las v_i . En ese caso:

$$\delta G = \sum_{i=1}^n \frac{\partial G}{\partial v_i} \delta v_i = \sum_{i=1}^n (u_i \delta v_i + \delta u_i v_i) - \delta F \quad (3.5)$$

$$= \sum_{i=1}^n \left[u_i \delta v_i + \left(v_i - \frac{\partial F}{\partial u_i} \right) \delta u_i \right] , \quad (3.6)$$

y por (3.1), tenemos que:

$$\frac{\partial G}{\partial v_i} = u_i . \quad (3.7)$$

Este resultado, junto con (3.1), expresa una clara dualidad de las transformaciones de Legendre, por lo que éstas reciben el nombre de *transformaciones duales*. El siguiente esquema muestra esta dualidad:

	<u>Sistema anterior</u>	<u>Nuevo sistema</u>
Variables:	u_1, \dots, u_n	v_1, \dots, v_n
Función:	$F = F(u_1, \dots, u_n)$	$G = G(v_1, \dots, v_n)$
	$v_i = \frac{\partial F}{\partial u_i} \quad (a)$	$u_i = \frac{\partial G}{\partial v_i} \quad (b)$
	$G = \sum_i u_i v_i - F \quad (b)$	$F = \sum_i u_i v_i - G \quad (a)$
	$G = G(v_1, \dots, v_n) \quad (c)$	$F = F(u_1, \dots, u_n) \quad (c)$

La transformación es enteramente simétrica. Podríamos intercambiar nuevo por viejo e ir de derecha a izquierda.

Consideremos a continuación la siguiente extensión de las transformaciones de Legendre presentadas hasta ahora. Para ello supongamos que nuestra función F es una función de dos conjuntos de variables,

$$F = F(w_1, \dots, w_m; u_1, \dots, u_n) ,$$

y realicemos la transformación de Legendre sólo sobre el conjunto de variables u_i . En ese caso:

$$G(w_1, \dots, w_m; v_1, \dots, v_n) = \sum_{i=1}^n u_i v_i - F . \quad (3.9)$$

Notemos que la nueva función G , también contiene al conjunto de variables que no intervienen en la transformación. A estas variables las llamamos *variables pasivas*, mientras a las variables que sí intervienen las llamamos *variables activas*. De nuevo, considerando una variación infinitesimal arbitraria de las variables w_i y v_i , tenemos,

$$\delta G = \sum_{i=1}^n \left[\delta v_i u_i + \left(v_i - \frac{\partial F}{\partial u_i} \right) \delta u_i \right] - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial w_i} \delta w_i , \quad (3.10)$$

y teniendo en cuenta (3.1), que cancela los términos proporcionales a δu_i , resulta:

$$\boxed{\frac{\partial G}{\partial v_i} = u_i \quad , \quad \frac{\partial G}{\partial w_j} = - \frac{\partial F}{\partial w_j}} \quad (3.11)$$

3.2. Transformaciones de Legendre aplicadas al Lagrangiano

Apliquemos ahora las transformaciones de Legendre a la función Lagrangiana:

$$L = L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) , \quad (3.12)$$

tomando como variables activas las velocidades generalizadas (n variables), mientras que las variables pasivas serán las coordenadas generalizadas y el tiempo ($n + 1$ variables).

Siguiendo el procedimiento establecido en la sección anterior relativo a las transformaciones de Legendre, tenemos por tanto que:

1. Introducir nuevas variables, “momentos generalizados” o simplemente “momentos”:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} . \tag{3.13}$$

2. Introducir la nueva función, que denotamos por H y la llamamos *Hamiltoniano*

$$H = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L . \tag{3.14}$$

3. Expresar la función H como función de las coordenadas y momentos,

$$H = H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t) , \tag{3.15}$$

donde empleando la definición de las nuevas variables p_i (3.13), se expresan las derivadas $\dot{q}_i = \dot{q}_i(q, p, t)$.

A modo de resumen, y para mostrar la dualidad entre Lagrangiano y Hamiltoniano, presentamos el esquema:

	<u>Sistema anterior</u>	<u>Nuevo sistema</u>
Función:	$L = L(q, \dot{q}, t)$	$H = H(q, p, t)$
Variables activas:	velocidades, \dot{q}_i	momentos, p_i
Variables pasivas:	q_i, t	q_i, t

(3.16)

$$\begin{array}{ll}
 p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} & \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\
 H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L & L = \sum_i p_i \dot{q}_i - H \\
 H = H(q, p, t) & L = L(q, \dot{q}, t)
 \end{array}$$

En este caso, para las variables pasivas tenemos:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} , \quad \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t} . \tag{3.17}$$

Debemos tener en cuenta que para que (3.13) sea invertible se requiere que:

$$\left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right\| \neq 0 . \tag{3.18}$$

3.3. Ecuaciones canónicas

De la transformación de Legendre hemos obtenido:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} . \quad (3.19)$$

Pero además de (3.17) tenemos:

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} . \quad (3.20)$$

Es decir, surgen $2n$ ecuaciones diferenciales de *primer orden*:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (3.21)$$

que se denominan *ecuaciones canónicas de Hamilton* o simplemente *ecuaciones canónicas*.

Las relaciones duales:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (3.22)$$

no expresan ninguna ley de movimiento. Simplemente expresan los momentos en términos de las velocidades y viceversa. Las ecuaciones de Lagrange están contenidas en:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} . \quad (3.23)$$

Ejemplo.- El oscilador armónico unidimensional.

Lagrangiano:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2x^2 ,$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \dot{x} = \frac{p}{m} .$$

Hamiltoniano:

$$H = p\dot{x} - L = \frac{p^2}{m} - \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 .$$

Ecuaciones canónicas de Hamilton:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -m\omega^2x .$$

Y dado que:

$$\dot{p} = m\ddot{x} \Rightarrow m\ddot{x} = -m\omega^2 x$$

Tenemos:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Que es justamente la ecuación de Lagrange.

Esquemáticamente, la transformación de Legendre dando lugar al Hamiltoniano ha implicado:

- $2n$ ecuaciones diferenciales de primer orden en el tiempo.
- Las derivadas sólo aparecen ahora a la izquierda de las ecuaciones:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}.$$

- Se duplica la dimensión del espacio de variables $n \rightarrow 2n$, $q_i \rightarrow q_i, p_i$. Pasamos así del espacio de configuración al denominado espacio de fases, asociado con la formulación Hamiltoniano de la mecánica clásica.
- El espacio de fases, al disponer del doble de dimensiones que el espacio de configuración, plantea la posibilidad de ampliar el conjunto de transformaciones posibles sobre un sistema mecánico más allá de las transformaciones de punto de la mecánica Lagrangiana asociada al espacio de configuración.

3.3.1. Notas

- El paso de n variables a $2n$ variables, podría realizarse de muchos modos, por ejemplo:

$$s_\alpha = q_\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, n, \quad (3.24)$$

$$s_\alpha = \dot{q}_{\alpha-n}, \quad \alpha = n+1, \dots, 2n. \quad (3.25)$$

De esta forma, las ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial s_{\alpha+n}} - \frac{\partial L}{\partial s_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, \dots, n, \quad (3.26)$$

junto con,

$$s_{\alpha+n} = \dot{s}_\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, n, \quad (3.27)$$

dan lugar a $2n$ ecuaciones diferenciales de primer orden en t , equivalentes a las ecuaciones de Lagrange. Sin embargo, las nuevas variables introducidas en (3.25) no cumplen el objetivo fundamental de dar lugar a transformaciones en $2n$ variables más allá de las transformaciones de punto de la mecánica de Lagrange, y en las que se mantengan ecuaciones de movimiento del mismo tipo (3.26) y (3.27) que en las variables originales. Este proceso ha sido una simple reescritura de las ecuaciones de la mecánica Lagrangiana.

- El Hamiltoniano *depende* de las coordenadas generalizadas empleadas para su cálculo (no así el Lagrangiano que es invariante).
- Consecuencia de las ecuaciones canónicas (3.21) es la siguiente expresión para la dependencia temporal de H :

$$\frac{dH}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} . \quad (3.28)$$

Téngase en cuenta que $\frac{\partial L}{\partial t} \equiv \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial t} \Big|_{q, p, t}$. Así H es una constante sólo si $L(q, \dot{q}, t)$ no tiene dependencia temporal explícita.

- H no siempre será equivalente a la energía total del sistema. Podemos decir que H es igual a $E = T + V$, sólo si dado $L = T - V$, T es una función homogénea cuadrática en las velocidades. Cuando el sistema no es aislado puede ocurrir que H no sea la energía total del sistema ya que su variación no será igual, en general, al trabajo realizado sobre el sistema por las fuerzas externas al mismo. Presentaremos varios ejemplos en los ejercicios.

3.4. La integral canónica

El par de ecuaciones (3.21), poseen un doble origen. El primer conjunto, proviene de la transformación de Legendre y puede considerarse como una definición implícita de los momentos p_i . El segundo conjunto de ecuaciones es consecuencia del principio variacional de Hamilton. La simetría del conjunto completo de ecuaciones sugiere que pueden ser deducidas de un único principio.

Recordemos la acción,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) dt , \quad (3.29)$$

a partir de la cual, e invocando el principio de Hamilton, se determina el movimiento real del sistema tal que haga estacionario dicho funcional, $\delta S = 0$ con las condiciones de que $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$. De (3.16) podemos también escribir:

$$L = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H(q, p, t) , \quad (3.30)$$

y una vez eliminados los p_i , al ser expresados como funciones de los q_i , \dot{q}_i y t , a partir de (3.13), tomar variaciones en (3.29) respecto a cambios en q_i . Sin embargo, no es necesario proceder así, ya que la variación de L respecto a un cambio de $p_j(q, \dot{q}, t)$ es idénticamente nula para cualquier posible trayectoria:

$$\delta L = \sum_{i=1}^n \delta p_i \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i = \sum_{i=1}^n \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i = 0 , \quad (3.31)$$

debido a la propia definición de transformación de Legendre, más explícitamente:

$$\dot{q}_i - \frac{\partial H(q, p, t)}{\partial p_i} \Big|_{(q, p(q, \dot{q}, t), t)} = 0 . \quad (3.32)$$

Así en el cálculo de δS , una variación de $p_i(q, \dot{q}, t)$ es cero, y por tanto tomaremos variaciones arbitrarias en los p_i junto con las variaciones de las q_i para la forma del Lagrangiano dada en (3.30). A partir de (3.21) y (3.30) tenemos:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H(q, p, t) \right] dt , \quad (3.33)$$

que recibe el nombre de *integral canónica* y que, imponiendo el principio de Hamilton, se llega a que el movimiento real del sistema debe cumplir:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{i=1}^n \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i + \sum_{i=1}^n \left(p_i \delta \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i \right) \right] dt = 0 . \quad (3.34)$$

Éste es nuestro nuevo problema variacional con $2n$ variables. Integrando por partes en (3.34) y recordando que $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$, tenemos:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{i=1}^n \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \sum_{i=1}^n \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i \right] dt = 0 . \quad (3.35)$$

El primer sumatorio de la derecha se anula idénticamente debido a (3.32), mientras que los factores que multiplican las variaciones arbitrarias e independientes de los δq_i se deben anular uno a uno, dando lugar al segundo conjunto de ecuaciones canónicas.

No obstante, llegados a (3.35), podemos igualmente considerar el hecho de hacer estacionaria (3.33) respecto a variaciones arbitrarias de p_i y q_i , tal que $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$, como un nuevo principio variacional del que deducir las ecuaciones canónicas, independientemente del principio de Hamilton ligado a la formulación Lagrangiana de la mecánica. Así, a partir de (3.35) llegamos de nuevo a las ecuaciones canónicas:

$$\boxed{\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} , \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}} \quad (3.36)$$

sin suponer que H proceda de hecho de un Lagrangiano mediante una transformación de Legendre, con lo que (3.32) aparece ahora como una ecuación de movimiento más. De este modo se pone en pie de igualdad la formulación Hamiltoniana y la formulación Lagrangiana de la mecánica.

Notemos que a cada coordenada q_k le corresponde un momento p_k , es decir las variables se agrupan en pares:

$$\left(\begin{array}{c} q_1 \\ p_1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} q_2 \\ p_2 \end{array} \right), \dots, \left(\begin{array}{c} q_n \\ p_n \end{array} \right) . \quad (3.37)$$

Por esta razón a cada par (q_k, p_k) se les llama “variables conjugadas”, y a $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ el “momento conjugado” de q_k .

Fijémonos que hemos llegado a ecuaciones de movimiento de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= f_i(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t) = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i &= g_i(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t) = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.\end{aligned}$$

Sin embargo, lo restrictivo en las ecuaciones canónicas es que las f_i y g_i son obtenidas por derivación de una única función, $H(q, p, t)$.

Podemos explicitar el hecho de que las variables aparezcan en pares en las ecuaciones canónicas introduciendo las variables complejas:

$$u_k = \frac{q_k + ip_k}{\sqrt{2}}, \quad u_k^* = \frac{q_k - ip_k}{\sqrt{2}}. \quad (3.38)$$

En ese caso el par de ecuaciones (3.36) puede sustituirse por la única ecuación:

$$\frac{du_k}{idt} = -\frac{\partial H}{\partial u_k^*}. \quad (3.39)$$

Comprobémoslo:

$$-\frac{\partial H}{\partial u_k^*} = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial u_k^*} - \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial u_k^*} = -\frac{i}{\sqrt{2}} (\dot{q}_k + i\dot{p}_k) = \frac{du_k}{idt}. \quad (3.40)$$

En el desarrollo anterior se ha tenido en cuenta que,

$$\begin{aligned}q_k &= \frac{1}{\sqrt{2}} (u_k + u_k^*), \quad p_k = \frac{1}{i\sqrt{2}} (u_k - u_k^*), \\ \frac{\partial q_k}{\partial u_k^*} &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{\partial p_k}{\partial u_k^*} = -\frac{1}{i\sqrt{2}},\end{aligned}$$

además de las ecuaciones canónicas (3.36).

Dada la dualidad de una transformación de Legendre, a cada problema Hamiltoniano le corresponde un problema Lagrangiano, según se reflejó en (3.16). Para ello, se expresan los momentos p_i en función de q , \dot{q} y t a partir de $\dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, y los sustituimos en

$$L(q, \dot{q}, t) = \sum_i p_i(q, \dot{q}, t) \dot{q}_i - H(q, p(q, \dot{q}, t), t). \quad (3.41)$$

A partir de este Lagrangiano obtenemos entonces las correspondientes ecuaciones de Lagrange.

Notación: Las ecuaciones canónicas se pueden expresar de un modo más compacto empleando la notación,

$$\begin{aligned}\xi_\alpha &= q_\alpha \quad , \quad \alpha = 1, \dots, n \quad , \\ \xi_\alpha &= p_{\alpha-n} \quad , \quad \alpha = n+1, \dots, 2n \quad .\end{aligned}\tag{3.42}$$

Introducimos la matriz:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \mathbb{O}_n & \mathbb{I}_n \\ -\mathbb{I}_n & \mathbb{O}_n \end{bmatrix} ,\tag{3.43}$$

donde \mathbb{I}_n representa la matriz unidad de orden n , y \mathbb{O}_n la matriz nula de orden n . Γ es una matriz $2n \times 2n$, cuyos elementos denotaremos por $\gamma_{\alpha\beta}$. Es directo comprobar que las ecuaciones canónicas (3.36) se pueden expresar como:

$$\dot{\xi}_\alpha = \sum_{\beta=1}^{2n} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial H}{\partial \xi_\beta}\tag{3.44}$$

Hay que familiarizarse con ambas notaciones, (q, p) y ξ_α .

Estudiemos las siguientes propiedades de la matriz Γ , que nos serán útiles para el desarrollo del tema. Comenzamos con dos propiedades obvias a partir de (3.43):

1. Γ es ortonormal, $\Gamma^\top \Gamma = \Gamma \Gamma^\top = \mathbb{I}$, o en componentes:

$$\sum_{\alpha} \gamma_{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\rho} = \sum_{\alpha} \gamma_{\beta\alpha} \gamma_{\rho\alpha} = \delta_{\beta\rho} .$$

2. Γ es antisimétrica, $\Gamma^\top + \Gamma = \mathbb{O}$,

$$\gamma_{\alpha\beta} = -\gamma_{\beta\alpha} .\tag{3.45}$$

3. El determinante de Γ es la unidad, ya que:

$$\det \Gamma = \sum_{\sigma} \varepsilon_{1 \dots n \ n+1 \dots 2n}^{\sigma_1 \dots \sigma_n \ \sigma_{n+1} \dots \sigma_{2n}} \gamma_{1\sigma_1} \dots \gamma_{n\sigma_n} \gamma_{(n+1)\sigma_{n+1}} \dots \gamma_{2n\sigma_{2n}} .$$

De (3.43) es obvio que sólo contribuye la permutación: $\sigma_1 = n+1, \sigma_2 = n+2, \dots, \sigma_n = 2n$; $\sigma_{n+1} = 1, \sigma_{n+2} = 2, \dots, \sigma_{2n} = n$. La signatura de dicha permutación es $(-1)^n$ que multiplicada por $(-1)^n$, que resulta de la multiplicación de los elementos de menos la matriz identidad comprendida entre las filas $n+1$ y $2n$, y columnas 1 y n , nos da 1 .

3.5. Los corchetes de Poisson

Apliquemos esta nueva notación para analizar la dependencia temporal de una variable canónica arbitraria. Sea $F = F(\xi, t)$, una función que depende de las variables dinámicas ξ_α y del tiempo. La evolución temporal de F viene dada por:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \xi_\alpha} \dot{\xi}_\alpha + \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial \xi_\alpha} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial H}{\partial \xi_\beta} + \frac{\partial F}{\partial t}, \quad (3.46)$$

donde hemos empleado las ecuaciones canónicas. Además en lo que queda de tema se emplea el convenio de Einstein para sumar sobre índices repetidos. Si analizamos el primer sumando:

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_\alpha} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial H}{\partial \xi_\beta} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = [F, H], \quad (3.47)$$

que se denomina *corchete de Poisson* de F y H . En general dadas dos variables dinámicas cualesquiera su corchete de Poisson se define como:

$$[R, S] = \frac{\partial R}{\partial \xi_\alpha} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial S}{\partial \xi_\beta} = \frac{\partial R}{\partial q_\alpha} \frac{\partial S}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial R}{\partial p_\alpha} \frac{\partial S}{\partial q_\alpha}. \quad (3.48)$$

Así la expresión (3.46) se puede reescribir como:

$$\frac{dF}{dt} = [F, H] + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (3.49)$$

Si $F = F(\xi)$, es decir, no depende explícitamente del tiempo:

$$\frac{dF}{dt} = [F, H]. \quad (3.50)$$

En particular, si $F = \xi_\alpha$,

$$\dot{\xi}_\alpha = [\xi_\alpha, H] = \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial H}{\partial \xi_\beta}, \quad (3.51)$$

y recuperamos (3.44).

3.5.1. Propiedades de los corchetes de Poisson

1. Linealidad:

$$[\alpha S + \beta R, T] = \alpha [S, T] + \beta [R, T] \quad (3.52)$$

2. Antisimetría:

$$[S, R] = -[R, S], \quad (3.53)$$

de donde se deduce, junto con 1, que $[S, \alpha T + \beta U] = \alpha [S, T] + \beta [S, U]$.

3. Regla del producto:

$$[S, RT] = [S, R]T + R[S, T] , \quad (3.54)$$

propiedad análoga a la derivación de un producto de funciones, si consideramos S como el operador derivada en la analogía. *Demostración.-*

$$\begin{aligned} [S, RT] &= \frac{\partial S}{\partial \xi_\alpha} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial(RT)}{\partial \xi_\beta} = \frac{\partial S}{\partial \xi_\alpha} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial R}{\partial \xi_\beta} T + \\ &+ R \frac{\partial S}{\partial \xi_\alpha} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial T}{\partial \xi_\beta} = [S, R]T + R[S, T] . \end{aligned}$$

4. La identidad de Jacobi:

$$[R, [S, T]] + [S, [T, R]] + [T, [R, S]] = 0 . \quad (3.55)$$

Demostración.-

$$\begin{aligned} [R, [S, T]] &= \frac{\partial R}{\partial \xi_\alpha} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial \xi_\beta} \left(\frac{\partial S}{\partial \xi_\eta} \gamma_{\eta\rho} \frac{\partial T}{\partial \xi_\rho} \right) = \\ &= \frac{\partial R}{\partial \xi_\alpha} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 S}{\partial \xi_\beta \xi_\eta} \gamma_{\eta\rho} \frac{\partial T}{\partial \xi_\rho} + \frac{\partial R}{\partial \xi_\alpha} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial S}{\partial \xi_\eta} \gamma_{\eta\rho} \frac{\partial^2 T}{\partial \xi_\beta \partial \xi_\rho} , \end{aligned} \quad (a)$$

$$[S, [T, R]] = \frac{\partial S}{\partial \xi_\alpha} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 T}{\partial \xi_\beta \xi_\eta} \gamma_{\eta\rho} \frac{\partial R}{\partial \xi_\rho} + \frac{\partial S}{\partial \xi_\alpha} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial T}{\partial \xi_\eta} \gamma_{\eta\rho} \frac{\partial^2 R}{\partial \xi_\beta \partial \xi_\rho} , \quad (b)$$

$$[T, [R, S]] = \frac{\partial T}{\partial \xi_\alpha} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 R}{\partial \xi_\beta \xi_\eta} \gamma_{\eta\rho} \frac{\partial S}{\partial \xi_\rho} + \frac{\partial T}{\partial \xi_\alpha} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial R}{\partial \xi_\eta} \gamma_{\eta\rho} \frac{\partial^2 S}{\partial \xi_\beta \partial \xi_\rho} . \quad (c)$$

Al sumar los tres corchetes, la suma se cancela a pares. A modo de ejemplo, observemos cómo se anulan el primer sumando de (a) y el segundo sumando de (c):

$$\begin{aligned} &\frac{\partial R}{\partial \xi_\alpha} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 S}{\partial \xi_\beta \partial \xi_\eta} \gamma_{\eta\rho} \frac{\partial T}{\partial \xi_\rho} + \frac{\partial T}{\partial \xi_\alpha} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial R}{\partial \xi_\eta} \gamma_{\eta\rho} \frac{\partial^2 S}{\partial \xi_\beta \partial \xi_\rho} = \\ &= \frac{\partial R}{\partial \xi_\eta} \gamma_{\eta\rho} \frac{\partial^2 S}{\partial \xi_\rho \partial \xi_\alpha} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial T}{\partial \xi_\beta} + \frac{\partial R}{\partial \xi_\eta} \gamma_{\eta\rho} \frac{\partial^2 S}{\partial \xi_\beta \partial \xi_\rho} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial T}{\partial \xi_\alpha} = \\ &= \frac{\partial R}{\partial \xi_\eta} \gamma_{\eta\rho} \frac{\partial^2 S}{\partial \xi_\rho \partial \xi_\alpha} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial T}{\partial \xi_\beta} - \frac{\partial R}{\partial \xi_\eta} \gamma_{\eta\rho} \frac{\partial^2 S}{\partial \xi_\rho \partial \xi_\beta} \gamma_{\beta\alpha} \frac{\partial T}{\partial \xi_\alpha} = \\ &= \frac{\partial R}{\partial \xi_\eta} \gamma_{\eta\rho} \frac{\partial^2 S}{\partial \xi_\rho \partial \xi_\alpha} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial T}{\partial \xi_\beta} - \frac{\partial R}{\partial \xi_\eta} \gamma_{\eta\rho} \frac{\partial^2 S}{\partial \xi_\rho \partial \xi_\alpha} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial T}{\partial \xi_\beta} = 0 . \end{aligned} \quad (3.56)$$

Donde hemos utilizado que Γ es antisimétrica. De forma equivalente se calcula para los otros pares de sumandos.

5. Regla de la cadena:

Sea $\eta_\alpha = \eta_\alpha(\xi, t)$, y siendo esta relación invertible, se tiene entonces:

$$[R, S] = \frac{\partial R}{\partial \eta_\alpha} [\eta_\alpha, \eta_\beta] \frac{\partial S}{\partial \eta_\beta} . \quad (3.57)$$

Demostración.-

$$[R, S] = \frac{\partial R}{\partial \xi_\alpha} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial S}{\partial \xi_\beta} = \frac{\partial R}{\partial \eta_\rho} \frac{\partial \eta_\rho}{\partial \xi_\alpha} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \eta_\lambda}{\partial \xi_\beta} \frac{\partial S}{\partial \eta_\lambda} = \frac{\partial R}{\partial \eta_\rho} [\eta_\rho, \eta_\lambda] \frac{\partial S}{\partial \eta_\lambda} .$$

6. Corchetes fundamentales:

$$[\xi_\alpha, \xi_\beta] = \gamma_{\alpha\beta} . \quad (3.58)$$

En la notación (q, p) ,

$$[q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0 , \quad (3.59)$$

$$[q_i, p_j] = \delta_{ij} . \quad (3.60)$$

7. Si R y S son constantes de movimiento ($dR/dt = 0$ y $dS/dt = 0$), entonces $[R, S]$ es otra constante de movimiento.

Demostración.-

$$\frac{d}{dt} [R, S] = [[R, S], H] + \frac{\partial}{\partial t} [R, S] ,$$

en virtud de (3.49). Por la identidad de Jacobi (3.55) ,

$$[[R, S], H] = - [[S, H], R] - [[H, R], S] ,$$

y tenemos,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [R, S] &= [R, [S, H]] + [[R, H], S] + \frac{\partial}{\partial t} [R, S] = \\ &= \left[R, [S, H] + \frac{\partial S}{\partial t} \right] + \left[[R, H] + \frac{\partial R}{\partial t}, S \right] = 0 , \end{aligned}$$

ya que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [R, S] &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial R}{\partial \xi_\alpha} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial S}{\partial \xi_\beta} \right) = \frac{\partial^2 R}{\partial t \partial \xi_\alpha} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial S}{\partial \xi_\beta} + \\ &\quad + \frac{\partial R}{\partial \xi_\alpha} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 S}{\partial \xi_\beta \partial t} = \left[\frac{\partial R}{\partial t}, S \right] + \left[R, \frac{\partial S}{\partial t} \right] , \quad (3.61) \end{aligned}$$

y por hipótesis,

$$\frac{dR}{dt} = [R, H] + \frac{\partial R}{\partial t} = 0, \quad \frac{dS}{dt} = [S, H] + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 . \quad (3.62)$$

3.6. El teorema de los corchetes de Poisson

Las ecuaciones de movimiento canónicas se han generado a partir del Hamiltoniano $H(\xi, t)$:

$$\dot{\xi}_\alpha = \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial H}{\partial \xi_\beta} . \quad (3.63)$$

Pero podríamos pensar en ecuaciones de movimiento más generales:

$$\dot{\xi}_\alpha = \psi_\alpha(\xi, t) , \quad (3.64)$$

en los que no hubiere una función $H(\xi, t)$ tal que:

$$\psi_\alpha = \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial H}{\partial \xi_\beta} . \quad (3.65)$$

El problema que nos planteamos es averiguar cuándo existe tal Hamiltoniano.

Teorema de los corchetes de Poisson

Sean $\xi_\alpha(t)$ la evolución de un sistema en el espacio de fases. Esta evolución viene generada por algún Hamiltoniano $H(\xi, t)$ sí y sólo si para cada par de variables dinámicas arbitrarias $R(\xi, t)$ y $S(\xi, t)$, se satisface la relación:

$$\frac{d}{dt} [R, S] = [\dot{R}, S] + [R, \dot{S}] . \quad (3.66)$$

Demostración.-

Condición Necesaria

Supongamos que la evolución temporal viene generada por $H(\xi, t)$. Entonces de (3.49) tenemos:

$$\frac{d}{dt} [R, S] = [[R, S], H] + \frac{\partial}{\partial t} [R, S] .$$

Utilizando la identidad de Jacobi:

$$[[R, S], H] = -[[S, H], R] - [[H, R], S] = [R, [S, H]] + [[R, H], S] ,$$

y teniendo en cuenta (3.61), llegamos a que efectivamente,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [R, S] &= [[R, H], S] + [R, [S, H]] + \left[\frac{\partial R}{\partial t}, S \right] + \left[R, \frac{\partial S}{\partial t} \right] = \\ &= \left[[R, H] + \frac{\partial R}{\partial t}, S \right] + \left[R, [S, H] + \frac{\partial S}{\partial t} \right] , \end{aligned}$$

y por tanto,

$$\frac{d}{dt} [R, S] = [\dot{R}, S] + [R, \dot{S}] .$$

Condición Suficiente

Nos preguntamos ahora si existe la función H tal que:

$$\frac{\partial H}{\partial \xi_\beta} = \dot{\xi}_\alpha \gamma_{\alpha\beta} ,$$

relación que es equivalente a (3.64) y a (3.65). Para ello se ha de satisfacer la condición de integrabilidad:

$$\chi_\beta = \dot{\xi}_\alpha \gamma_{\alpha\beta} , \quad \frac{\partial \chi_\alpha}{\partial \xi_\beta} = \frac{\partial \chi_\beta}{\partial \xi_\alpha} .$$

En ese caso podremos asegurar que existe una función $H(\xi, t)$ tal que:

$$\chi_\alpha = \frac{\partial H}{\partial \xi_\alpha} .$$

Comprobemos que éste es el caso:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\xi_\alpha, \xi_\beta] &= \frac{d}{dt} \gamma_{\alpha\beta} = 0 = [\dot{\xi}_\alpha, \xi_\beta] + [\xi_\alpha, \dot{\xi}_\beta] = \\ &= \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial \xi_\mu} \gamma_{\mu\lambda} \frac{\partial \xi_\beta}{\partial \xi_\lambda} + \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial \xi_\mu} \gamma_{\mu\lambda} \frac{\partial \psi_\beta}{\partial \xi_\lambda} = \\ &= \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial \xi_\mu} \gamma_{\mu\beta} + \gamma_{\alpha\lambda} \frac{\partial \psi_\beta}{\partial \xi_\lambda} = 0 . \end{aligned}$$

Multiplicando esta última ecuación por $\gamma_{\alpha\rho} \gamma_{\beta\sigma}$ y sumando, se tiene:

$$\gamma_{\alpha\rho} \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial \xi_\mu} \gamma_{\mu\beta} \gamma_{\beta\sigma} + \gamma_{\alpha\rho} \gamma_{\alpha\lambda} \frac{\partial \psi_\beta}{\partial \xi_\lambda} \gamma_{\beta\sigma} = 0 .$$

Teniendo en cuenta que Γ es ortonormal y antisimétrica, tenemos que:

$$- \gamma_{\alpha\rho} \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial \xi_\sigma} + \frac{\partial \psi_\beta}{\partial \xi_\rho} \gamma_{\beta\sigma} = 0 . \quad (3.67)$$

Puesto que,

$$\chi_\rho = \psi_\alpha \gamma_{\alpha\rho} , \quad \chi_\sigma = \psi_\beta \gamma_{\beta\sigma} ,$$

vemos que se satisface la condición de integrabilidad a partir de (3.67):

$$\boxed{\frac{\partial \chi_\rho}{\partial \xi_\sigma} = \frac{\partial \chi_\sigma}{\partial \xi_\rho}}$$

Ejemplo.- Consideremos las ecuaciones:

$$\dot{q} = pq , \quad \dot{p} = -pq .$$

Si este movimiento fuese generado por un Hamiltoniano:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = pq, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -pq,$$

de donde se deduce,

$$\frac{\partial H}{\partial p} = pq, \quad \frac{\partial H}{\partial q} = pq.$$

Las derivadas cruzadas son por tanto,

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} = p, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} = q.$$

¡Las derivadas cruzadas no son iguales y por tanto no hay tal Hamiltoniano!

Veamos que en este ejemplo no se cumple (3.66):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [q, p] &= 0 \\ [q, p] + [q, \dot{p}] &= [pq, p] - [q, pq] = -[p, pq] - [q, pq] = p - q \neq 0, \end{aligned}$$

y por tanto, en virtud del teorema de los paréntesis de Poisson, no existe tal Hamiltoniano.

Corolarios

1. Sean $\xi_\alpha(t)$ la evolución de un sistema en el espacio de fases. Esta evolución viene generada por algún Hamiltoniano $H(\xi, t)$ sí y sólo si,

$$\frac{d}{dt} [\xi_\beta, \xi_\alpha] = 0 = [\dot{\xi}_\alpha, \xi_\beta] + [\xi_\alpha, \dot{\xi}_\beta], \quad (3.68)$$

con $\alpha, \beta = 1, \dots, 2n$.

La demostración de que es condición necesaria es análoga a la realizada para el teorema de los corchetes de Poisson, sustituyendo $R \rightarrow \xi_\alpha$ y $S \rightarrow \xi_\beta$. En cuanto a que es condición suficiente, la demostración es exactamente la misma que la realizada para el teorema anterior.

2. Si R y S son constantes de movimiento, entonces $[R, S]$ es una nueva constante de movimiento

Demostración.-

$$\frac{d}{dt} [R, S] = [\dot{R}, S] + [R, \dot{S}] = 0 \Rightarrow [R, S] = cte.$$

3.7. El espacio de fases y el fluido de fases

En Mecánica Lagrangiana hemos trabajado en el espacio de configuración, donde n coordenadas generalizadas definen unívocamente la posición del sistema.

En mecánica Hamiltoniana trabajamos en un espacio en el que conservamos las n coordenadas generalizadas, pero añadimos los n momentos p_i . Es decir, estamos en un espacio $2n$ -dimensional, en el que cada punto define unívocamente el *estado del sistema*. El físico americano Gibbs llamó a este (q, p) espacio de $2n$ dimensiones, el espacio de fases.

Matemáticamente, dado que las ecuaciones canónicas son de primer orden, en mecánica Hamiltoniana tenemos que:

$$\begin{aligned} q_i &= f_i(q_1^0, \dots, q_n^0, p_1^0, \dots, p_n^0, t) , \\ p_i &= g_i(q_1^0, \dots, q_n^0, p_1^0, \dots, p_n^0, t) , \end{aligned} \quad (3.69)$$

es decir, fijado el punto inicial en el espacio de fases el movimiento subsiguiente queda completamente fijado. Pero además, dado que para cada estado inicial hay un movimiento único,

$$\begin{aligned} q_i^0 &= q_i^0(q(t), p(t), t) , \\ p_i^0 &= p_i^0(q(t), p(t), t) , \end{aligned}$$

es decir, las relaciones (3.69) son invertibles.

Por otra parte, si añadimos el tiempo como variable adicional, tenemos un espacio de $2n + 1$ dimensiones llamado el *espacio de los estados*, en el que las curvas no se cruzan. Dicho espacio se puede “visualizar” añadiendo una dimensión ortogonal al resto de $2n$ dimensiones canónicas asociada al tiempo. En el espacio de los estados dadas unas condiciones iniciales (q_0, p_0) el sistema describe un movimiento determinado que viene dado por una curva en dicho espacio, tal que las curvas no se cruzan para distintas condiciones iniciales. De este modo, el conjunto de todo movimiento posible del sistema queda completamente geometrizado como un conjunto infinito de curvas que no se entrecruzan y que llenan el espacio de $2n + 1$ dimensiones. Esto *no* ocurre en el espacio de configuración, ya que cada punto de este espacio n -dimensional sólo fija la posición pero no las velocidades.

La imagen geométrica y analítica del espacio de fases para un sistema cerrado está en completa analogía con el movimiento de un fluido en tres dimensiones, donde las líneas de flujo no se entrecruzan en el transcurso del tiempo. En hidrodinámica tenemos dos descripciones posibles, “descripción de partícula” y “descripción de campo”. En la *descripción de partícula* se sigue el movimiento individual de cada partícula del fluido y se da su posición en función del tiempo y de cierta posición inicial:

$$\begin{aligned} x &= x(x_0, y_0, z_0, t) , \\ y &= y(x_0, y_0, z_0, t) , \\ z &= z(x_0, y_0, z_0, t) . \end{aligned} \quad (3.70)$$

Por otra parte, se define el “campo de velocidades” como:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt}, \quad \dot{z} = \frac{dz}{dt} . \quad (3.71)$$

Resolviendo (3.70), se obtiene x_0 , y_0 y z_0 en función de x , y , z , t , y sustituyendo en (3.71) tenemos,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= u(x, y, z, t), \\ \dot{y} &= v(x, y, z, t), \\ \dot{z} &= w(x, y, z, t),\end{aligned}\tag{3.72}$$

que es la llamada “descripción de campo”.

Podemos pasar de una descripción a otra. Ya hemos visto como es el paso de la descripción de partícula a la de campo. Si tenemos las ecuaciones de campo, éstas se integran y obtenemos la descripción de partícula. Ambos formalismos son equivalentes.

Esta imagen hidrodinámica se traslada directamente al espacio de fases. La única diferencia es que en lugar de un espacio 3-dimensional tenemos un espacio $2n$ -dimensional (q, p) con el *campo de velocidades* dado por:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n,\tag{3.73}$$

de forma equivalente:

$$\dot{\xi}_\alpha = \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial H}{\partial \xi_\beta}, \quad \alpha = 1, \dots, 2n.\tag{3.74}$$

Esta analogía entre el movimiento de un sistema en el espacio de fases y el movimiento de un fluido hace que al primero también se le denomine movimiento del fluido de fase.

El movimiento de un fluido se dice que es estacionario si el campo de velocidades no depende explícitamente del tiempo, es decir, en un punto dado la velocidad no depende del tiempo. Esto ocurre en el espacio de fases si H no depende explícitamente del tiempo $H = H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$. Así podemos decir que *el fluido de fase asociado a un sistema conservativo está en un estado estacionario de movimiento*.

El teorema de conservación de la energía en los sistemas conservativos, $H = E$, posee una interpretación geométrica en conexión con el movimiento del fluido de fase. La ecuación:

$$H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) = E,\tag{3.75}$$

representa una superficie del espacio de fases $2n$ -dimensional. Si la constante E asume valores arbitrarios obtenemos una familia infinita de superficies que llena el espacio. Así, un fluido de fases que comienza su movimiento en una determinada superficie de energía se mantiene contenido en dicha superficie.

3.8. El teorema de Liouville

Es muy ilustrativo seguir con la analogía hidrodinámica. Un fluido se dice que es “incompresible” si el volumen de una porción arbitraria del fluido se mantiene constante a lo largo del movimiento del mismo, aun cuando la forma de dicha porción cambie con el tiempo.

Sea

$$\int_{R_0} dx_0 dy_0 dz_0,\tag{3.76}$$

el volumen contenido en la región R_0 de \mathbb{R}^3 , y sea

$$\int_{R(t)} dx dy dz , \quad (3.77)$$

el volumen de la región $R(t)$, que es la región evolucionada temporalmente de R_0 . Para que el volumen sea el mismo es necesario y suficiente que el módulo del Jacobiano de la transformación

$$(x_0, y_0, z_0) \leftrightarrow (x(t), y(t), z(t)) , \quad (3.78)$$

tenga módulo unidad. Esta es la condición necesaria y suficiente para un fluido incompresible en la descripción de partícula.

Descripción de campo. Veamos de forma sencilla que la condición de incompresibilidad es en este caso:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 . \quad (3.79)$$

Para ello, téngase en cuenta que la variación del volumen V encerrado por una superficie S en un intervalo dt debido al movimiento de las partículas, cuyas líneas de evolución forman la superficie S , es:

$$dV = dt \int_S \vec{v} d\vec{S} = dt \int_{R_S} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} dx dy dz , \quad (3.80)$$

como $dV = 0$ para un fluido incompresible, sea cual sea la superficie S , se sigue (3.79).

En el fluido de fases el volumen de una cierta región viene dado por la generalización a $2n$ dimensiones de (3.77),

$$\sigma = \int dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n , \quad (3.81)$$

y se mantiene constante a lo largo del movimiento del fluido de fases ya que:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} \right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} \right) = 0 , \quad (3.82)$$

donde se han empleado las ecuaciones canónicas (3.36). Este resultado es equivalente a afirmar que *el flujo total del fluido de fases, tomado para cualquier superficie cerrada del espacio de fases, es siempre cero*. El hecho de que el fluido de fases se mueva como un fluido incompresible fue descubierto por Liouville en 1838 y se conoce como el teorema de Liouville. En la sección 4.6 veremos otra demostración de este teorema en correspondencia con la descripción de partícula del fluido de fases.

El teorema de Liouville, nos ha llevado a la ley de conservación del volumen encerrado por una superficie; aunque la región se deforme, su volumen permanece invariante durante el movimiento, $\sigma = cte$.

Poincaré llamó “invariante integral” a cualquier integral asociada al espacio de fase que se mantuviera constante a lo largo del movimiento del sistema.

Ya hemos visto que el volumen σ de un fragmento del espacio de fases, es un ejemplo de tales invariantes integrales. Otro ejemplo es *la circulación*.

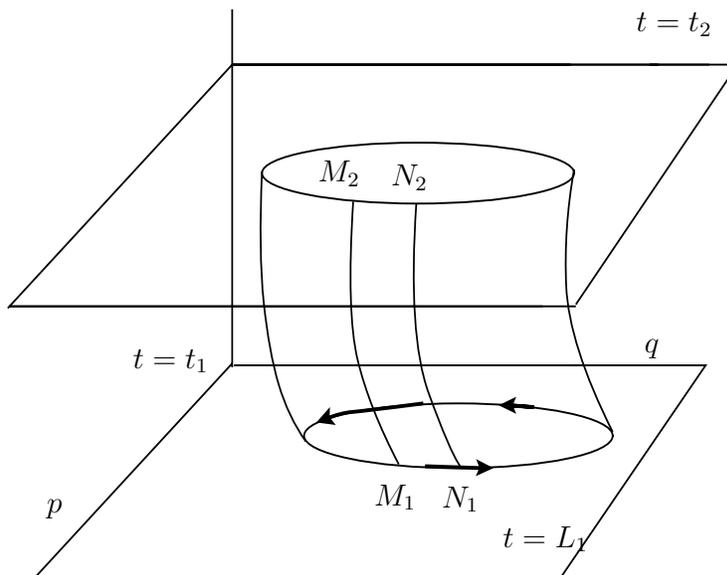


Figura 3.1: Evolución temporal de la curva L_1 en el espacio de fases.

3.9. El teorema de la circulación de Helmholtz

Tomemos la acción:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt ,$$

entonces a lo largo de la trayectoria real del sistema la variación de la acción es:

$$\delta S = \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2} = \left[\sum_{i=1}^n p_i \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2} , \tag{3.83}$$

para cualquier variación de q_i y p_i .

Dibujemos una curva cerrada arbitraria L_1 en el espacio de fases en un cierto tiempo t_1 . En $t = t_2$ esta curva evoluciona a L_2 . También vemos de la figura (3.1) que $M_1 \rightarrow M_2$ y $N_1 \rightarrow N_2$. Si M_1, N_1 , están infinitesimalmente próximos en t_1 así lo estarán M_2 y N_2 en t_2 , con $t_2 - t_1$ un intervalo finito. Una curva la podemos describir por:

$$q_i = f_i(\tau) , p_i = g_i(\tau) , \tag{3.84}$$

con τ un parámetro. A lo largo de la curva cerrada, ver figura (3.1), se calcula la integral:

$$\Gamma = \oint \sum_{i=1}^n p_i dq_i = \oint \sum_{i=1}^n p_i q'_i d\tau , \tag{3.85}$$

con $q'_i = \frac{dq_i}{d\tau}$.

Veamos que Γ es un invariante de movimiento. Para dos curvas infinitesimalmente próximas en el espacio de los estados, de (3.83) tenemos:

$$dS \equiv S [\overline{M_2 M_1}] - S [\overline{N_2 N_1}] = \left[\sum_{i=1}^n p_i dq_i \right]_{t_1}^{t_2}. \quad (3.86)$$

Integrando esta ecuación entre dos puntos τ_1 y τ_2 obtenemos la variación finita,

$$\Delta S = \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} \sum_{i=1}^n p_i dq_i \right]_{t_1}^{t_2}. \quad (3.87)$$

Si se da la vuelta completamente a L_1 y a L_2 , entonces ΔS es cero:

$$\Delta S = 0 = \left[\oint \sum_{i=1}^n p_i dq_i \right]_{t_1}^{t_2} = \oint_{L_2} \sum_{i=1}^n p_i dq_i - \oint_{L_1} \sum_{i=1}^n p_i dq_i, \quad (3.88)$$

siendo t_1 y t_2 dos instantes de tiempo arbitrarios. Por tanto,

$$\oint \sum_{i=1}^n p_i dq_i = \Gamma = cte, \quad (3.89)$$

con lo que la circulación Γ es una nueva invariante integral.

Helmholtz aplicó este teorema al movimiento de una partícula en el espacio en tres dimensiones. Aquí el espacio físico tendría entonces 6 dimensiones. Podemos, no obstante, considerar sólo tres dimensiones y a cada punto (x, y, z) , para un cierto instante de tiempo, asociarle un vector de momento lineal (p_x, p_y, p_z) . Para tiempos posteriores este espacio, con el campo vectorial de momentos lineales asociado, evoluciona según las ecuaciones canónicas. De este modo, podemos tomar una curva cerrada en el espacio ordinario y por el teorema de conservación de la circulación tenemos que:

$$\Gamma = \oint m \vec{v} d\vec{l} = cte. = \int m (\vec{\nabla} \times \vec{v}) d\vec{S}, \quad (3.90)$$

es una constante a lo largo del movimiento de un fluido, cuyas líneas de flujo coinciden con las trayectorias posibles de la partícula en el tiempo, en dicho espacio de configuración extendido con un campo vectorial de momentos lineales asociado. Si inicialmente $\Gamma = 0$ para cualquier posible curva cerrada en $t = 0$ en el espacio de configuración extendido, entonces no se generan vórtices y el movimiento de este fluido permanece libre de vórtices, $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$.

3.10. Eliminación de variables ignorables. La función de Routh

El formalismo de Hamilton es especialmente adecuado para tratar con variables cíclicas o ignorables, que ya fueron definidas en la sección 2.13.

Sea q_n una coordenada ignorable,

$$L(q_1, \dots, q_{n-1}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) \Rightarrow H(q_1, \dots, q_{n-1}, p_1, \dots, p_{n-1}, c_n, t), \quad (3.91)$$

con,

$$c_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = p_n = cte, \quad (3.92)$$

ya que H , dado en (3.91), tampoco depende de q_n y entonces,

$$\begin{aligned} \dot{p}_n &= -\frac{\partial H}{\partial q_n} \Rightarrow c_n = cte, \\ \dot{q}_n &= \frac{\partial H}{\partial c_n}. \end{aligned} \quad (3.93)$$

De este modo el formalismo Hamiltoniano es más directo para tratar variables ignorables ya que \dot{q}_n aparece ya despejado en función del resto de las coordenadas y momentos. Así, el problema queda reducido a calcular $q_n(t)$ por simple integración de (3.93), una vez que q_1, \dots, q_{n-1} y p_1, \dots, p_{n-1} , se hayan obtenido como funciones del tiempo al resolver las ecuaciones canónicas,

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (3.94)$$

que sólo involucran $n-1$ grados de libertad.

En ocasiones es conveniente mantener un formalismo híbrido entre la dinámica de Lagrange y la de Hamilton. Eso ocurre cuando en lugar de sustituir todas las velocidades generalizadas por sus ímpetus, en la transformación de Legendre que nos lleva de la dinámica de Lagrange a la de Hamilton, sólo sustituimos algunas. Esto se consigue mediante la función de Routh.

Sea el Lagrangiano:

$$L(q_1, \dots, q_s, q_{s+1}, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, \dot{q}_{s+1}, \dots, \dot{q}_n, t). \quad (3.95)$$

Realizamos a continuación una transformación de Legendre tomando como variables activas $(\dot{q}_{s+1}, \dots, \dot{q}_n)$ y variables pasivas $(q_1, \dots, q_n), (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s)$ y t . La función de Routh (o Routhiana) viene dada entonces por:

$$R(q_1, \dots, q_s, q_{s+1}, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, p_{s+1}, \dots, p_n, t) = \sum_{i=s+1}^n \dot{q}_i p_i - L \quad (3.96)$$

Realizando el esquema de la sección 3.1:

	<u>Lagrangiano</u>	<u>Función de Routh</u>	
Variables activas:	$\dot{q}_{s+1}, \dots, \dot{q}_n$	p_{s+1}, \dots, p_n	
Variables pasivas:	$q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s; t$	$q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s; t$	(3.97)
$i = 1, \dots, n-s$	$p_{s+i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{s+i}}$	$\dot{q}_{s+i} = \frac{\partial R}{\partial p_{s+i}}$	

En este caso, para las variables pasivas tenemos:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial R}{\partial q_i} \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial R}{\partial t} \quad . \quad (3.98)$$

En cuanto a las ecuaciones de movimiento:

- Para las $n - s$ últimas variables, la función de Routh se comporta como un Hamiltoniano:

$$\dot{q}_{s+i} = \frac{\partial R}{\partial p_{s+i}} \quad , \quad \dot{p}_{s+i} = -\frac{\partial R}{\partial q_{s+i}} \quad , \quad i = 1, \dots, n - s \quad . \quad (3.99)$$

- Para las s primeras variables la función de Routh se comporta como un Lagrangiano:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0 \quad , \quad i = 1, \dots, s \quad . \quad (3.100)$$

Es especialmente útil identificar las variables activas con variables cíclicas o ignorables y las pasivas con aquellas coordenadas no ignorables. De este modo las variables activas (en la función de Routh son momentos generalizados) son las constantes c_{s+1}, \dots, c_n :

$$R(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, c_{s+1}, \dots, c_n, t) \quad . \quad (3.101)$$

Queda así un problema de Lagrange con s -ecuaciones de segundo orden y una vez resuelto éste por simple integración de

$$\dot{q}_{s+i} = \frac{\partial R}{\partial c_{s+i}} \quad , \quad i = 1, \dots, n - s \quad , \quad (3.102)$$

tendremos $q_{s+1}(t), \dots, q_n(t)$ (es decir, las coordenadas cíclicas).¹

3.11. Forma paramétrica de las ecuaciones canónicas

Hemos visto como el concepto de “espacio de los estados” (espacio fásico junto con el tiempo), geometriza completamente el problema del movimiento asociado con las ecuaciones canónicas. La totalidad de las soluciones de las ecuaciones canónicas asociadas a un Hamiltoniano arbitrario se puede ver como una familia infinita de curvas que no se intersectan y que llenan el espacio de los estados.

Sin embargo, mientras cada q_i está asociada a un momento conjugado p_i , no ocurre lo mismo con el tiempo t . Así, en vez de considerar las coordenadas q_i y los momentos generalizados p_i como funciones del tiempo t , consideraremos las variables conjugadas y el tiempo t como funciones de un parámetro sin especificar τ , es decir, el tiempo pasa a ser considerado como una *variable mecánica* más.

¹Obsérvese la igualdad entre menos la función de Routh para el caso discutido con variables cíclicas con el Lagrangiano \bar{L} de (2.137).

El siguiente problema es formular las ecuaciones canónicas de Hamilton del movimiento considerando el tiempo t como una coordenada más, $t = q_{n+1}$. Tenemos entonces el siguiente conjunto de variables conjugadas:

$$\left(\begin{array}{c} q_1 \\ p_1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} q_2 \\ p_2 \end{array} \right), \dots, \left(\begin{array}{c} q_n \\ p_n \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} t \\ p_t \end{array} \right) . \quad (3.103)$$

Teniendo además en cuenta que,

$$\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt} = \frac{dq_i}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{q'_i}{t'} , \quad (3.104)$$

se sigue que la acción viene dada por:

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} L \left(q_1, \dots, q_n, q_{n+1}, \frac{q'_1}{q'_{n+1}}, \frac{q'_2}{q'_{n+1}}, \dots, \frac{q'_n}{q'_{n+1}} \right) q'_{n+1} d\tau , \quad (3.105)$$

de modo que,

$$p_t = \frac{\partial(Lt')}{\partial t'} = -H , \quad (3.106)$$

donde la última igualdad se deduce tal y como hicimos para llegar a (2.148). El procedimiento habitual para llegar a las ecuaciones canónicas no es aplicable en este caso. De hecho podemos ver que el Hamiltoniano se cancela idénticamente. Para ello, tengamos en cuenta que el Lagrangiano:

$$L' = L \left(q_1, \dots, q_n, q_{n+1}, \frac{q'_1}{q'_{n+1}}, \dots, \frac{q'_n}{q'_{n+1}} \right) q'_{n+1} , \quad (3.107)$$

es una función homogénea de grado uno en q'_i , $i = 1, 2, \dots, n + 1$. Por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^{n+1} q'_i \frac{\partial L'}{\partial q'_i} = L' , \quad (3.108)$$

y como consecuencia,

$$H' = \sum_{i=1}^{n+1} p_i q'_i - L' = 0 . \quad (3.109)$$

Así, la integral canónica queda reducida a:

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sum_{i=1}^{n+1} p_i q'_i d\tau , \quad (3.110)$$

sin ninguna función Hamiltoniana. Pero, ¿son todas las p_i y q_i constantes de movimiento? No, obviamente. Existen condiciones auxiliares en nuestro problema. No podemos despejar las q'_i en función de los p_i ya que los p_i son invariantes bajo un cambio:

$$q'_i \rightarrow q'_i \alpha ,$$

puesto que:

$$L' = L \left(q_1, \dots, q_n, q_{n+1}, \frac{q_1'}{q'_{n+1}}, \dots, \frac{q_n'}{q'_{n+1}} \right) q'_{n+1} \rightarrow \alpha L q'_{n+1} ,$$

y, por tanto, los momentos transformados son iguales a los originales,

$$p_i = \frac{\partial(\alpha L')}{\partial(\alpha q'_i)} = \frac{\partial L'}{\partial q'_i} . \quad (3.111)$$

Ahora bien, dado que las ecuaciones (3.111) no son invertibles, esto significa que no son independientes entre sí, es decir, debe existir una relación entre los p_i . En efecto, si tomamos $q_{n+1} = t$, como hemos visto $p_{n+1} = p_t = -H$ y H es función del resto de variables canónicas,

$$p_{n+1} = -H(q_1, \dots, q_{n+1}, p_1, \dots, p_n) , \quad (3.112)$$

con lo que p_{n+1} no es una variable independiente. De este modo el presente problema variacional supone hacer estacionario el funcional:

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} (p_1 q'_1 + \dots + p_n q'_n + p_{n+1} q'_{n+1}) d\tau , \quad (3.113)$$

con la condición auxiliar:

$$p_{n+1} = -H(q_1, \dots, q_{n+1}, p_1, \dots, p_n) . \quad (3.114)$$

Si en la integral (3.113) sustituimos la ligadura (3.114) tenemos

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} (p_1 q'_1 + \dots + p_n q'_n - H q'_{n+1}) d\tau . \quad (3.115)$$

Imponiendo que la integral anterior sea estacionaria bajo variaciones de q_{n+1} , con $\delta q_{n+1}(\tau_1) = \delta q_{n+1}(\tau_2) = 0$, llegamos a que:

$$\delta S = 0 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(q'_{n+1} \frac{dH}{d\tau} - \frac{\partial H}{\partial q_{n+1}} \right) \delta q_{n+1} d\tau , \quad (3.116)$$

deduciendo así la conocida ecuación de evolución temporal del Hamiltoniano,

$$\frac{dH}{d\tau} - \frac{\partial H}{\partial q_{n+1}} q'_{n+1} = 0 , \quad (3.117)$$

equivalente a

$$\frac{dH}{dt} - \frac{\partial H}{\partial t} = 0 , \quad (3.118)$$

que derivamos en (3.28) como consecuencia de las ecuaciones canónicas asociadas a las variables conjugadas (q_k, p_k) , con $k = 1, 2, \dots, n$, mientras que ahora surge como una ecuación de movimiento más.

Por otra parte (3.115) también la podemos escribir en la forma estándar de la integral canónica:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (p_1 \dot{q}_1 + \dots + p_n \dot{q}_n - H) dt , \quad (3.119)$$

con lo que el resto de ecuaciones canónicas para $i = 1, \dots, n$, adicionales a (3.118), son las ecuaciones canónicas (3.36).

Sin embargo, para mantener la mayor simetría posible entre los distintos pares de variables conjugadas desde un punto de vista formal, no queremos particularizar la variable q_{n+1} y es preferible escribir la identidad existente entre las q_i y las p_i en la forma general:

$$K(q_1, \dots, q_{n+1}, p_1, \dots, p_{n+1}) = 0 . \quad (3.120)$$

Esta forma preserva la simetría de las $2n + 2$ variables canónicas, sin tener preferencia por ninguna de ellas.

El problema Hamiltoniano en forma paramétrica supone finalmente hacer estacionario el funcional (3.113), bajo la condición auxiliar (3.120). Podemos tratar la condición auxiliar a través del método de los multiplicadores de Lagrange, modificando la integral de la siguiente forma:

$$\bar{S} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(\sum_{i=1}^{n+1} p_i q'_i - \lambda(\tau) K \right) d\tau . \quad (3.121)$$

Si se desea podemos hacer $\lambda = 1$ para una elección adecuada de la variable τ . En ese caso obtenemos la integral variacional:

$$\bar{S} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(\sum_{i=1}^{n+1} p_i q'_i - K \right) d\tau . \quad (3.122)$$

Que está en forma canónica, excepto que ahora tenemos $2n + 2$ variables canónicas en lugar de $2n$. La función K , el miembro izquierdo de (3.120), hace las veces de Hamiltoniano. Entonces, la formulación paramétrica de las ecuaciones canónicas da lugar a:

$$\left. \begin{aligned} q'_k &= \frac{\partial K}{\partial p_k} , \\ p'_k &= -\frac{\partial K}{\partial q_k} . \end{aligned} \right\} k = 1, \dots, n + 1 . \quad (3.123)$$

Para la elección especial de condición auxiliar:

$$K = p_{n+1} + H(q_1, \dots, q_{n+1}, p_1, \dots, p_n) , \quad (3.124)$$

tenemos:

$$\left. \begin{aligned} q'_k &= \frac{\partial H}{\partial p_k} , \\ p'_k &= -\frac{\partial H}{\partial q_k} , \end{aligned} \right\} k = 1, \dots, n . \quad (3.125)$$

$$q'_{n+1} = \frac{\partial p_{n+1}}{\partial p_{n+1}} = 1, \quad (3.126)$$

$$p'_{n+1} = -\frac{\partial K}{\partial q_{n+1}} = -\frac{\partial H}{\partial q_{n+1}}. \quad (3.127)$$

La ecuación (3.126) implica que:

$$\frac{dq_{n+1}}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} = 1 \Rightarrow t = \tau + cte, \quad (3.128)$$

y, por tanto, (3.127) se reduce de nuevo a:

$$\frac{dH}{d\tau} = \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (3.129)$$

En (3.128) hemos identificado q_{n+1} con t dado que por la condición auxiliar (3.124), $p_{n+1} = p_t$.

La formulación general paramétrica (3.123) de las ecuaciones canónicas tiene grandes ventajas teóricas y se puede considerar como la forma más avanzada de las ecuaciones canónicas. Muestra el papel de los sistemas conservativos desde una perspectiva nueva. Al tratar t como una variable dinámica *todo sistema se torna en conservativo* ya que K no depende de τ en el espacio de fases extendido (espacio de los estados). Así el movimiento del fluido de fases es estacionario y toda partícula permanece en la superficie:

$$K = cte. \quad (3.130)$$

De esta forma, la condición auxiliar $K = 0$ se satisface permanentemente sólo si los valores iniciales de q_i, p_i , con $i = 1, \dots, 2n + 2$, para τ_1 cumplen que $K = 0$.

La formulación del principio de mínima acción para sistemas conservativos por Euler y Lagrange adquiere importancia renovada a la luz de la forma paramétrica de las ecuaciones canónicas. Recordemos que este principio requiere la minimización de la integral de $2T$ con respecto al tiempo, con la condición auxiliar de que $E = T + V = cte.$ para el movimiento del sistema. Si pasamos del espacio de configuración al espacio de fases, el principio de Hamilton se puede expresar en hacer estacionario el funcional:

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} (p_1 q'_1 + \dots + p_n q'_n) d\tau, \quad (3.131)$$

con la condición auxiliar:

$$H - E = 0. \quad (3.132)$$

Notemos que no es un aspecto trivial (o por lo menos no lo es para el que escribe) pasar de un principio variacional en el espacio de configuración al correspondiente principio variacional en el espacio de fases y de hecho el integrando en (3.131), $2T$, puede adoptar muchas formas como función de p_i y \dot{q}_i , dando lugar a priori a distintos problemas de buscar extremos.

Para ver que (3.131) es de hecho correcto, consideremos el problema variacional expresado por las ecuaciones canónicas paramétricas que requiere hacer estacionario el funcional:

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} (p_1 q'_1 + \dots + p_n q'_n + p_{n+1} q'_{n+1}) d\tau, \quad (3.133)$$

con la condición auxiliar:

$$K = 0 . \quad (3.134)$$

Para sistemas conservativos, con $t = q_{n+1}$ una variable cíclica, tenemos $K = p_{n+1} + H$, y H es independiente de p_{n+1} y de q_{n+1} . Minimizando respecto de t la integral (3.133), tal y como hicimos para obtener (3.116) y (3.118), llegamos a que el momento p_{n+1} es constante y puede ser reemplazado por la constante $-E$, ya que de $K = 0$ se sigue que $p_{n+1} = -H$. El último término del integrando en (3.133) puede entonces eliminarse, ya que es una derivada total respecto de τ . Se da lugar así a (3.131) y (3.132) tal y como queríamos probar.

La forma paramétrica de las ecuaciones canónicas nos permite profundizar en la mutua relación entre los distintos principios variacionales de la mecánica. Tomando la integral canónica en la forma (3.113):

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sum_{i=1}^{n+1} p_i q'_i d\tau , \quad (3.135)$$

la diferencia entre los diferentes principios variacionales corresponde a las diferentes interpretaciones de la condición auxiliar:

$$K(q_1, \dots, q_{n+1}, p_1, \dots, p_{n+1}) = 0 . \quad (3.136)$$

Como se verá en un problema de clase, la condición auxiliar del principio de Jacobi asume la forma:²

$$-\frac{1}{2} \frac{\sum_{i,k=1}^n b_{ik} p_i p_k}{p_{n+1} + V} = 1 , \quad (3.137)$$

tal que $2T = \sum a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k = \sum b_{ik} p_i p_k$. Esta misma condición auxiliar puede darse obviamente en la forma:

$$\frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n b_{ik} p_i p_k + V = -p_{n+1} , \quad (3.138)$$

que es la condición auxiliar del principio de Hamilton (3.132). La equivalencia entre estos dos principios, el de la mínima acción y el de Jacobi, está pues establecida. Seguimos aquí el mismo razonamiento que el empleado unas líneas más arriba para mostrar que (3.131) y (3.132) son correctos, para eliminar en la integral canónica en forma paramétrica el término $p_{n+1} q'_{n+1}$ y fijar $p_{n+1} = -E$. Más aún, sustituyendo la ligadura (3.138) directamente en (3.135) y regresando desde el espacio de fases al espacio de configuración, obtenemos el principio de Hamilton. Esto muestra la equivalencia entre los tres principios variacionales para sistema conservativos y muestra la potencia de la forma paramétrica del formalismo Hamiltoniano.

Es de interés ver qué ocurre si conservamos la condición (3.137) y ahora aplicamos el método de los multiplicadores de Lagrange para hacer estacionaria la integral (3.135). En ese caso:

$$\bar{S} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(\sum_{i=1}^n p_i q'_i + p_{n+1} q'_{n+1} + \frac{\lambda \sum_{i,k=1}^n b_{ik} p_i p_k}{p_{n+1} + V} \right) d\tau . \quad (3.139)$$

²El potencial es independiente de velocidades.

Fijémonos en que $q'_{n+1} = t'$ sólo aparece en $p_{n+1}q'_{n+1}$, así al imponer que la integral sea estacionaria respecto a una variación de t llegamos a que:

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} p_{n+1} \delta t' d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(\frac{d}{d\tau} (p_{n+1} \delta t) - \frac{dp_{n+1}}{d\tau} \delta t \right) d\tau . \quad (3.140)$$

Con la condición $\delta t(\tau_1) = \delta t(\tau_2) = 0$,

$$\frac{dp_{n+1}}{d\tau} = 0 \Rightarrow p_{n+1} = -E = cte. \quad (3.141)$$

como debe ser para sistemas conservativos en virtud de la ligadura (3.138). Por otra parte, imponiendo que la integral sea estacionaria respecto a variaciones de p_{n+1} , llegamos a:

$$q'_{n+1} - \frac{\lambda \sum_{ik} b_{ik} p_i p_k}{2(E-V)^2} = 0 \Rightarrow q'_{n+1} = \frac{\lambda \sum_{ik} b_{ik} p_i p_k}{2(E-V)^2} . \quad (3.142)$$

Sustituyendo (3.141) y (3.142) en (3.139), eliminando el término $p_{n+1}q'_{n+1}$ y fijando $p_{n+1} = -E$ en el resto de términos, dado que ya se ha realizado el proceso de hacer estacionaria la integral (3.139) para cambios en las variables p_{n+1} y t , llegamos a que hay que hacer estacionaria la integral:

$$\bar{\bar{S}} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sum_{ik} a_{ik} q'_i q'_k \frac{(E-V)}{\lambda} \left(\frac{2(E-V)}{\sum_{jl} b_{jl} p_j p_l} - \frac{2(E-V)^2}{(\sum_{jl} b_{jl} p_j p_l)^2} \right) d\tau . \quad (3.143)$$

Para llegar la expresión anterior hemos tenido en cuenta (3.104). Finalmente en virtud de la ligadura (3.137), la integral anterior se puede reescribir como,

$$\bar{\bar{S}} = \frac{1}{2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sum_{ik} a_{ik} q'_i q'_k \frac{(E-V)}{\lambda} d\tau . \quad (3.144)$$

Finalmente, eligiendo un nuevo parámetro θ tal que $2\lambda d\tau = d\theta$, y llamando τ otra vez al nuevo parámetro tenemos:

$$\bar{\bar{S}} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} (E-V) \sum_{i,k=1}^n a_{ik} q'_i q'_k d\tau \quad (3.145)$$

Este es el principio de Jacobi, pero sin la raíz cuadrada. Los caminos mecánicos que se siguen de este principio son, sin embargo, los mismo que los del principio de Jacobi original. La diferencia radica únicamente en la normalización de la variable independiente τ . El τ del principio de Jacobi original es un parámetro sin especificar. El τ del principio (3.145) está normalizado de una manera definida, tal y como hemos visto unas líneas más arriba.

Capítulo 4

Transformaciones Canónicas

4.1. Función Generatriz

En mecánica Lagrangiana vimos las transformaciones de punto en el espacio de configuración:

$$Q_i = Q_i(q, t) . \quad (4.1)$$

Dichas transformaciones siempre dan lugar a ecuaciones de Lagrange en las nuevas variables, aun cuando la forma de éstas en término de las nuevas coordenadas cambie al pasar de un sistema de coordenadas a otro, a no ser que se trate de una simetría. Más concretamente, si las q_i verifican,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 , \quad L = L(q, \dot{q}, t) ,$$

entonces las Q_i satisfacen necesariamente:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_i} - \frac{\partial L'}{\partial Q_i} &= 0 , \\ L' (Q, \dot{Q}, t) &= L (q(Q, t), \dot{q}(Q, \dot{Q}, t), t) . \end{aligned} \quad (4.2)$$

En mecánica Hamiltoniana los momentos y las coordenadas se encuentran en pie de igualdad y hablamos del espacio de fases en lugar del espacio de configuración. El espacio de fases tiene dimensión $2n$ y en él tendremos transformaciones más generales:

$$\begin{aligned} Q_i &= Q_i(q, p, t) , \\ P_i &= P_i(q, p, t) , \end{aligned} \quad (4.3)$$

del sistema de variables originales (q, p) a las finales (Q, P) . Esto no es más que un cambio de coordenadas dentro del espacio fásico. Exigiremos en general que el cambio (4.3) sea invertible, con lo que $\det|\partial(Q, P)/\partial(q, p)| \neq 0$. Para el caso particular:

$$Q_i = Q_i(q, t) , \quad (4.4)$$

tendremos una transformación de punto de la mecánica de Lagrange sólo si los nuevos momentos se transforman como corresponde a la mecánica Lagrangiana,

$$p_i(Q, P, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_j} \frac{\partial \dot{Q}_j}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^n P_j \frac{\partial \dot{Q}_j}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^n P_j \frac{\partial Q_j}{\partial q_i}, \quad (4.5)$$

donde el último paso se sigue de (1.55).

Los cambios de coordenadas (4.3) se dice que son *canónicos*, o que constituyen una *transformación canónica*, si existe una nueva función $K(Q, P, t)$ tal que la evolución temporal de las nuevas variables es canónica, esto es, si se verifica:

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial p_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}, \quad (4.6)$$

independientemente del Hamiltoniano inicial, es decir, independientemente del contenido dinámico concreto del problema.

Por ejemplo, consideremos la siguiente transformación:

$$Q = q, \quad P = p^{1/2} - q^2. \quad (4.7)$$

Invirtiendo:

$$p = (P + Q^2)^2, \quad q = Q. \quad (4.8)$$

Veamos que esta transformación no es canónica dado que la evolución temporal de las nuevas variables no es siempre canónica ya que depende del Hamiltoniano inicial. Tomemos los Hamiltonianos:

$$1) \quad H = \frac{1}{2}p^2.$$

$$\begin{aligned} \dot{p} &= 0, \quad \dot{q} = p, \\ \dot{Q} &= \dot{q} = p = (P + Q^2)^2, \\ \dot{P} &= \frac{1}{2}p^{-1/2}\dot{p} - 2q\dot{q} = -2(P + Q^2)^2 Q. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Tomando $K = \frac{1}{3}(P + Q^2)^3$ se obtienen, en efecto, las ecuaciones anteriores.

$$2) \quad H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}q^2.$$

$$\begin{aligned} \dot{q} &= p, \quad \dot{p} = -q, \\ \dot{Q} &= (Q + P^2)^2, \\ \dot{P} &= -\frac{1}{2}Q(P + Q^2)^{-1} - 2Q(P + Q^2)^2. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Si existiese una función $K(Q, P, t)$ tendríamos:

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= \frac{\partial K}{\partial P} = (P + Q^2)^2, \\ \dot{P} &= -\frac{\partial K}{\partial Q} = -\frac{Q}{2} (P + Q^2)^{-1} - 2Q (P + Q^2)^2, \\ \frac{\partial^2 K}{\partial Q \partial P} &= 2 (P + Q^2) 2Q = 4Q (P + Q^2), \\ \frac{\partial^2 K}{\partial P \partial Q} &= -\frac{Q}{2} (P + Q^2)^{-2} + 4Q (P + Q^2),\end{aligned}$$

y entonces:

$$\frac{\partial^2 K}{\partial Q \partial P} \neq \frac{\partial^2 K}{\partial P \partial Q},$$

por lo que no existe tal K .

Si P, Q son variables canónicamente conjugadas deben hacer extremo el funcional de la integral canónica (3.35), con lo que se debe cumplir que:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_i P_i \dot{Q}_i - K(Q, P, t) \right) dt = 0. \quad (4.11)$$

Simultáneamente las viejas variables, dado que también parametrizan la trayectoria real del sistema y son canónicas, deben cumplir:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - H(q, p, t) \right) dt = 0. \quad (4.12)$$

En la forma original de la variación de la integral canónica (3.35), se tomó $\delta q_\alpha(t_1) = \delta q_\alpha(t_2) = 0$ y los δp_α arbitrarios. Análogamente para las nuevas variables Q y P . Sin embargo, las ecuaciones canónicas también se obtienen a partir de la integral canónica (3.35) si imponemos adicionalmente que $\delta p_\alpha(t_1) = \delta p_\alpha(t_2) = 0$, con lo que coordenadas y momentos tienen un tratamiento completamente análogo dentro de la mecánica Hamiltoniana, tal y como mantendremos en lo que sigue. Este aspecto es muy deseable para tratar sobre las transformaciones canónicas dado que éstas, en general, mezclan momentos y coordenadas y sería artificial cualquier diferenciación en el tratamiento de coordenadas y momentos dentro de la integral canónica. Por lo tanto, para que (4.11) y (4.12) sucedan simultáneamente se debe cumplir:

$$\lambda \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - H(q, p, t) \right) = \sum_i P_i \dot{Q}_i - K(Q, P, t) + \frac{dF(q, p, t)}{dt}. \quad (4.13)$$

Del mismo modo podríamos considerar F como función de las nuevas variables. La función F se llama *función generatriz* de la transformación canónica.

La constante multiplicativa λ en (4.13) está relacionada con unas transformaciones canónicas particularmente simples conocidas como *transformaciones de escala* en el espacio de fases. Definamos:

$$Q'_i = \mu q_i, \quad P'_i = \nu p_i, \quad K'(Q', P', t) = \lambda H(q, p, t), \quad \lambda = \mu\nu. \quad (4.14)$$

Ésta es una transformación dado que:

$$\lambda \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - H \right) = \sum_i P'_i \dot{Q}'_i - K'(Q', P', t). \quad (4.15)$$

Notemos además que en virtud de (4.13),

$$\lambda \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - H \right) = \sum_i P'_i \dot{Q}'_i - K'(Q', P', t) = \sum_i P_i \dot{Q}_i - K(Q, P, t) + \frac{dF}{dt}. \quad (4.16)$$

Así que toda transformación canónica con $\lambda \neq 1$ siempre se puede considerar como una transformación de escala, $\lambda \neq 1$, seguida de una transformación canónica con $\lambda = 1$. A las transformaciones canónicas con $\lambda \neq 1$ se las conoce como *transformaciones canónicas generalizadas*. En el futuro nos restringiremos a las transformaciones canónicas con $\lambda = 1$, ya que $\lambda \neq 1$ no introduce más que una transformación de escala adicional, que ya hemos caracterizado en (4.14).

Para $\lambda = 1$, tenemos a partir de (4.13) que:

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H - \left(\sum_i P_i \dot{Q}_i - K \right) = \frac{dF(q, p, t)}{dt}. \quad (4.17)$$

Tomemos $F = F(q, p, t)$, con:

$$\begin{aligned} Q &= Q(q, p, t), \quad P = P(q, p, t), \\ \xi &= (Q, P), \quad \eta = (q, p), \quad \left| \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right| \neq 0. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Entonces, aplicando la regla de la cadena para expresar las derivadas temporales:

$$\begin{aligned} \sum_i p_i \dot{q}_i - H - \sum_{i,j} \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \dot{q}_j P_i + \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} \dot{p}_j P_i \right) - \sum_i \frac{\partial Q_i}{\partial t} P_i + K &= \\ &= \sum_j \frac{\partial F}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial F}{\partial p_j} \dot{p}_j + \frac{\partial F}{\partial t} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Igualando coeficientes de \dot{q}_i , \dot{p}_i y el término independiente:

$$\begin{aligned} p_i - \sum_j \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} P_j &= \frac{\partial F}{\partial q_i}, \\ - \sum_j \frac{\partial Q_j}{\partial p_i} P_j &= \frac{\partial F}{\partial p_i}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$K = H + \sum_j \frac{\partial Q_j}{\partial t} P_j + \frac{\partial F}{\partial t} . \quad (4.21)$$

Las $2n$ ecuaciones (4.20) implican que dada una transformación canónica, $F(q, p, t)$ queda completamente determinada salvo la adición de una función del tiempo $f(t)$, que no influye en las ecuaciones canónicas. Notemos que no toda transformación (4.18) puede satisfacer (4.20) dado que las derivadas primeras de la supuesta función generatriz F , dadas en (4.20), deben satisfacer la condición de integrabilidad, esto es, la igualdad entre las derivadas segundas cruzadas de F . En el caso en que dicha condición no se satisfaga entonces el cambio de coordenadas (4.18) no satisface las ecuaciones (4.20) y, por tanto, no es una transformación canónica. Por otra parte, si la transformación (4.18) no involucra el tiempo explícitamente está claro que siempre se puede tomar F que sea solución de (4.20) sin dependencia explícita de t , esto es, como función de punto en el espacio de fases, $F(q, p)$. Por otro lado, dada $F(q, p, t)$ no queda fijado el cambio de coordenadas. Por ejemplo, a partir de (4.20) podríamos determinar $2n$ derivadas $\partial Q_i/\partial q_j$ y $\partial Q_i/\partial p_j$ en función del resto de derivadas del mismo tipo y de los nuevos momentos P_i , siendo éstos cualesquiera. Como muestra de la indeterminación del cambio de coordenadas es obvio que si Q_i son las nuevas coordenadas entonces,

$$Q_i \rightarrow Q_i + C , \quad C = cte , \quad (4.22)$$

también satisfacen (4.20).

Por otra parte, la ecuación (4.21) nos da el nuevo Hamiltoniano K en función del Hamiltoniano H original. Notemos que si F está indeterminada por la adición de una función $f(t)$ entonces K está indeterminado salvo la adición de una derivada total $f'(t)$, que por supuesto no influye en las ecuaciones canónicas (3.36). En el supuesto en que la transformación canónica (4.18) no involucre el tiempo explícitamente, ya hemos discutido que siempre es posible tomar $F(q, p)$ y, además, como $\partial Q_i/\partial t = 0$, se sigue de (4.21) que $K(Q, P) = H(q(Q, P), p(Q, P))$.

Algunas propiedades de las transformaciones canónicas son:

- Tomemos la transformación canónica inversa, intercambiando el orden en (4.17) se sigue que:

$$\sum_i \dot{Q}_i P_i - K - \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - H \right) = -\frac{dF(q, p, t)}{dt} \equiv \frac{dF'(Q, P, t)}{dt} . \quad (4.23)$$

Así, $-F(Q, P, t)$ es la función generatriz de la transformación canónica inversa.

- Tomemos la actuación consecutiva de dos transformaciones canónicas:

$$\begin{aligned} \sum_i \dot{q}_i p_i - H_1 &= \sum_i \dot{Q}_i P_i - H_2 + \frac{dF_1}{dt} = \sum_i \dot{\bar{Q}}_i \bar{P}_i - H_3 + \frac{dF_2}{dt} + \frac{dF_1}{dt} , \\ Q &= Q(q, p, t) , \quad P = P(q, p, t) , \\ \bar{Q} &= (Q(q, p, t), P(q, p, t), t) , \quad \bar{P} = (Q(q, p, t), P(q, p, t), t) . \end{aligned} \quad (4.24)$$

Por lo tanto, la suma $F_1 + F_2$, es la correspondiente función generatriz de la transformación global $(q, p) \rightarrow (\bar{Q}, \bar{P})$.

4.2. Transformaciones canónicas básicas

Son transformaciones para las que la función generatriz, con una elección adecuada de variables independientes entre las viejas y nuevas variables, sí que determina unívocamente el cambio de coordenadas en el espacio de fases. Existen cuatro tipos fundamentales, a partir de los cuales se pueden construir transformaciones mixtas como veremos más abajo. Los tipos fundamentales son:

1. Supongamos que el conjunto (q, Q) forma un sistema de coordenadas del espacio de fases. Ello implica que dado el cambio,

$$Q_i = Q_i(q, p, t) ,$$

podemos despejar de aquí $p_i = p_i(q, Q, t)$ y sustituir este resultado en:

$$P_i = P_i(q, p(q, Q, t), t) = P_i(q, Q, t) .$$

Por ejemplo, sea la transformación canónica:

$$Q_i = -p_i , P_i = q_i , \quad (4.25)$$

obviamente (q, Q) constituye un sistema de coordenadas válido. No ocurre así trivialmente en el caso $Q_i = q_i$, $P_i = q_i + p_i$.

En el supuesto en que (q, Q) sea un sistema de coordenadas en el espacio de fases, podemos tomar $F \equiv F_1 = F_1(q, Q, t)$ y dado que Q_i y q_i son variables independientes, se sigue que:

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H = \sum_i P_i \dot{Q}_i - K + \sum_i \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial t} . \quad (4.26)$$

Igualando coeficientes:

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} , P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} , K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} . \quad (4.27)$$

Es necesario que se verifique que el Hessiano:

$$\left\| \frac{\partial^2 F_1}{\partial q \partial Q} \right\| \neq 0 , \quad (4.28)$$

para así poder expresar las nuevas variables en función de las viejas y viceversa. Así, de las segundas ecuaciones de (4.27) podemos despejar $q_i = q_i(Q, P, t)$. Sustituyendo este resultado en las primeras relaciones se obtiene $p_i = p_i(Q, P, t)$ y, con ello, calculamos $K(Q, P, t)$ teniendo en cuenta la última ecuación de (4.27).

Para manipulaciones futuras es conveniente multiplicar (4.17) por dt , con lo que tenemos que para toda transformación canónica debe cumplirse,

$$\sum_i p_i dq_i - H dt = \sum_i P_i dQ_i - K dt + dF . \quad (4.29)$$

2. Consideremos ahora como variables independientes las coordenadas antiguas y los momentos nuevos, es decir, $F = F_2 = F_2(q, P, t)$. En este caso:

$$\begin{aligned} \sum_i p_i dq_i - H dt &= \sum_i d(P_i Q_i) - \sum_i dP_i Q_i - K dt + dF, \\ d \left(\underbrace{F + \sum_i P_i Q_i}_{F_2(q, P, t)} \right) &= \sum_i p_i dq_i + \sum_i dP_i Q_i + (K - H) dt. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial F_2}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = Q_i, \quad K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}. \quad (4.31)$$

Análogamente a (4.28) se ha de imponer que:

$$\left\| \frac{\partial^2 F_2}{\partial q \partial P} \right\| \neq 0. \quad (4.32)$$

Es útil observar que el paso de $F_1(q, Q, t)$ a $F_2(q, P, t)$ es formalmente análogo a una transformación de Legendre.

• Ejemplo

Consideremos la transformación:

$$\begin{aligned} Q_i &= q_i, \\ P_i &= q_i + p_i. \end{aligned} \quad (4.33)$$

En este caso:

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i - q_i, \\ Q_i &= \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = q_i, \end{aligned} \quad \left\| \frac{\partial^2 F_2}{\partial q \partial P} \right\| \neq 0. \quad (4.34)$$

Aquí hemos considerado una función generatriz de tipo 2 ya que q y P son independientes, no así q y Q . Es decir, (q, P) forman un sistema de coordenadas en el espacio de fases. De las ecuaciones anteriores obtenemos:

$$\left. \begin{aligned} F_2 &= \sum_i q_i P_i + f(q), \\ P_i + \frac{\partial f(q)}{\partial q_i} &= P_i - q_i, \\ f(q) &= -\frac{1}{2} \sum_i q_i^2, \end{aligned} \right\} \Rightarrow F_2 = \sum_i q_i P_i - \frac{1}{2} q_i^2. \quad (4.35)$$

3. Sea ahora $F = F_3 = F_3(p, Q, t)$, entonces:

$$-\sum_i dp_i q_i - \sum_i P_i dQ_i + (K - H) dt = d\left(F - \sum_i p_i q_i\right) = dF_3(p, Q, t) . \quad (4.36)$$

Deducimos en este caso,

$$\frac{\partial F_3}{\partial p_i} = -q_i , \quad \frac{\partial F_3}{\partial Q_i} = -P_i , \quad K = H + \frac{\partial F_3}{\partial t} , \quad (4.37)$$

además se debe cumplir,

$$\left\| \frac{\partial^2 F_3}{\partial p \partial Q} \right\| \neq 0 . \quad (4.38)$$

4. Si podemos tomar como variables independientes los momentos antiguos y los momentos nuevos, tenemos $F = F_4 = F_4(p, P, t)$. Por tanto:

$$d\left(F - \sum_i p_i q_i + \sum_i P_i Q_i\right) = -\sum_i dp_i q_i + \sum_i dP_i Q_i + (K - H) dt = dF_4(p, P, t) . \quad (4.39)$$

Y en este caso hallamos:

$$\frac{\partial F_4}{\partial p_i} = -q_i , \quad \frac{\partial F_4}{\partial P_i} = Q_i , \quad K = H + \frac{\partial F_4}{\partial t} , \quad (4.40)$$

con la condición adicional,

$$\left\| \frac{\partial^2 F_4}{\partial p \partial P} \right\| \neq 0 . \quad (4.41)$$

• Ejemplo

El ejemplo anterior (4.33), puede también describirse en términos de una función generatriz F_4 .

$$\begin{cases} Q_i = q_i , \\ P_i = q_i + p_i , \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_i = P_i - p_i , \\ q_i = P_i - p_i , \end{cases} \Rightarrow (p, P), \quad \left\| \frac{\partial^2 F_4}{\partial p \partial P} \right\| \neq 0 . \quad (4.42)$$

En este caso resulta,

$$F_4 = -\sum_i P_i p_i + \frac{1}{2} \sum_i p_i^2 + \frac{1}{2} \sum_i P_i^2 . \quad (4.43)$$

Recopilando los cuatro casos anteriores en una tabla resumen:

Función Generatriz F	Derivadas de F	Caso especial
$F_1(q, Q, t)$	$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}$	$F_1 = \sum_i q_i Q_i \rightarrow Q_i = p_i, P_i = -q_i$
$F_2(q, P, t)$	$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}$	$F_2 = \sum_i q_i P_i \rightarrow Q_i = q_i, P_i = p_i$
$F_3(p, Q, t)$	$q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}, P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i}$	$F_3 = \sum_i p_i Q_i \rightarrow Q_i = -q_i, P_i = -p_i$
$F_4(p, P, t)$	$q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i}, Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i}$	$F_4 = \sum_i p_i P_i \rightarrow Q_i = p_i, P_i = -q_i$

Cuadro 4.1: Cuadro resumen de los cuatro tipos de transformaciones canónicas básicas.

Observemos que en todos los casos $K = H + \frac{\partial F}{\partial t}$, por lo que si F no depende explícitamente del tiempo, $K = H$.

Para estos casos particulares de transformaciones canónicas dada una función generatriz, la transformación canónica asociada es única y el cambio de variable se obtiene por simple derivación y sustitución, obteniéndose de un modo directo:

$$Q = Q(q, p, t), P = P(q, p, t), K = K(Q, P, t).$$

Por ejemplo, para $F = F_2(q, P, t)$, se puede despejar $P_i = P_i(q, p, t)$ del sistema de ecuaciones:

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \tag{4.44}$$

y luego podemos sustituir en:

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}, \tag{4.45}$$

y se tiene $Q_i = Q_i(q, p, t)$, por lo que también podemos determinar $K = K(Q, P, t)$.

En general, una transformación canónica no se ajustará a uno de los cuatro tipos básicos de transformaciones canónicas, sino que será necesario utilizar una función generatriz que sea una mezcla de los cuatro tipos, según los grados de libertad. Hablamos de una transformación de tipo mixto. No obstante, se debe tener presente que en las transformaciones canónicas de tipo mixto para cada par de variables conjugadas la función generatriz debe depender de acuerdo a uno de los cuatro tipos anteriormente discutidos, que siempre conjugan una variable original y otra nueva.

• **Ejemplo**

Sea $F = F(q_1, P_1, p_2, Q_2, t)$. Vemos claramente que es una transformación canónica de tipo mixto dado que para cada par de variables canónicas F depende de una variable antigua y de otra variable nueva. Entonces, partiendo de (4.29), tenemos:

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 - H dt = P_1 dQ_1 + P_2 dQ_2 - K dt + \frac{\partial F}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial F}{\partial p_2} dp_2 + \frac{\partial F}{\partial P_1} dP_1 + \frac{\partial F}{\partial Q_2} dQ_2 + \frac{\partial F}{\partial t} dt, \quad (4.46)$$

de donde resulta, expresando la diferenciación en términos de los diferenciales de las variables independientes que aparecen como argumentos de F ,

$$p_1 dq_1 - q_2 dp_2 - H dt = -Q_1 dP_1 + P_2 dQ_2 - K dt + \underbrace{d(F + P_1 Q_1 - p_2 q_2)}_{F'}. \quad (4.47)$$

Con ello obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F'}{\partial q_1} &= p_1, & \frac{\partial F'}{\partial p_2} &= -q_2, \\ \frac{\partial F'}{\partial P_1} &= Q_1, & \frac{\partial F'}{\partial Q_2} &= -P_2. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Para el nuevo Hamiltoniano obtenemos de nuevo:

$$K = H + \frac{\partial F'}{\partial t}. \quad (4.49)$$

Fijémonos cómo se mantiene la misma estructura en la relación entre nuevas/viejas variables y las derivadas de la función generatriz F' , que las expresadas en la tabla 4.1 para cada par de variables canónicas por separado.

Teorema (Caratheodory, 1965)¹

Definimos como transformaciones canónicas elementales aquéllas en que k ($0 \leq k \leq n$) de las q_i, p_i son nuevamente renombradas como:

$$Q_i = p_i, \quad P_i = -q_i, \quad (4.50)$$

y el resto de q_j, p_j se dejan tal cual. Entonces, toda transformación canónica se puede descomponer como una transformación canónica elemental seguida de una transformación de tipo 1.

¹ *Calculus of Variations and Partial Differential Equations of First Order*, Chelsea Publishing Company, New York, Second Edition, 1982.

4.2.1. Ejemplos de transformaciones canónicas

A continuación analizamos algunos ejemplos importantes de transformaciones canónicas.

1. Transformación identidad:

$$F_2 = \sum_i q_i P_i . \quad (4.51)$$

Observamos que, según (4.31):

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i , \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = q_i , \quad K = H .$$

2. Una generalización directa de (4.51) viene dada por la función generatriz:

$$F_2 = \sum_i f_i(q_1, \dots, q_n, t) P_i , \quad (4.52)$$

donde las f_i pueden ser cualquier conjunto conveniente de funciones independientes. Según (4.31):

$$Q_j = \frac{\partial F_2}{\partial P_j} = f_j(q, t) , \quad \frac{\partial F_2}{\partial q_j} = \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial q_j} P_i , \quad K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} , \quad (4.53)$$

y observamos que las Q_i sólo dependen de las coordenadas antiguas y del tiempo y no de los nuevos momentos.

Llegamos a la misma transformación de las coordenadas que en (4.53) empleando la función generatriz:

$$F_2 = f_i(q_1, \dots, q_n, t) P_i + g(q_1, \dots, q_n, t) . \quad (4.54)$$

En este caso, los momentos vienen dados por:

$$p_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j} = \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial q_j} P_i + \frac{\partial g}{\partial q_j} . \quad (4.55)$$

Ya vimos en la expresión (4.5) que para una transformación de punto (4.4) en el espacio de configuración, tenemos:

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_i} \frac{\partial \dot{Q}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i P_i \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} . \quad (4.56)$$

Así, sólo cuando $\partial g / \partial q_j = 0$ tenemos una transformación de punto de la dinámica de Lagrange. Dado que las f_i son arbitrarias podemos concluir que *todas las transformaciones puntuales en el espacio de configuración son canónicas*, como ya sabíamos. No obstante, este ejemplo ilustra el hecho de que el conjunto de transformaciones en la dinámica de Lagrange sólo es un subconjunto muy particular de todo el conjunto posible de transformaciones canónicas.

3. La función generatriz del primer tipo $F_1 = F_1(q, Q, t) = \sum_i q_i Q_i$ da lugar al cambio de variables:

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} = Q_i, \quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} = -q_i, \quad (4.57)$$

es decir, simplemente se intercambia el papel de los momentos por el de coordenadas, y sólo debemos tener en cuenta el cambio de signo, reflejo de la diferencia en el signo de las ecuaciones canónicas para expresar las derivadas temporales de momentos y coordenadas.

Podemos también ver que esta transformación es canónica directamente de las ecuaciones de Hamilton:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Si sustituimos p_i por Q_i , las ecuaciones siguen estando en forma canónica si sustituimos P_i por $-q_i$. Es obvio pues que en el formalismo canónico no hay traza de ningún papel especial de las coordenadas generalizadas q_i frente a los momentos, ni viceversa.

4. Ejemplo de transformación mixta:

$$\begin{aligned} Q_1 &= q_1, & P_1 &= p_1, \\ Q_2 &= p_2, & P_2 &= -q_2. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Esta transformación deja invariante una de las parejas (q, p) y permuta la otra pareja (con un cambio de signo). Por lo tanto, podemos considerar una función generatriz mixta de tipo 1 y 2, suma de los ejemplos 1 y 3 de esta sección para cada par de variables canónicas separadamente, es decir,

$$F = q_1 P_1 + q_2 Q_2. \quad (4.59)$$

5. Las transformaciones canónicas también pueden ser empleadas para resolver la evolución temporal de un sistema realizando un cambio de variables que nos lleve a una forma especialmente simple del Hamiltoniano. Consideremos el ejemplo del oscilador armónico simple en una dimensión.

Sea ω la frecuencia del oscilador, el Hamiltoniano del sistema viene dado por:

$$H = \frac{1}{2m} (p^2 + m^2 \omega^2 q^2). \quad (4.60)$$

Dado que la energía es una constante de movimiento podemos pensar en la posibilidad de encontrar un Hamiltoniano en el que la nueva coordenada Q sea cíclica tal que el nuevo momento, que se conservará, sea función de H . Concretamente, queremos encontrar una transformación canónica que verifique,

$$K = H = \frac{1}{2m} f(P)^2. \quad (4.61)$$

Basta para ello con considerar el cambio de variables,

$$p = f(P) \cos Q, \quad q = \frac{f(P)}{m\omega} \sin Q. \quad (4.62)$$

El cambio anterior se puede reproducir con la función generatriz $F_1(q, Q, t)$,

$$F_1 = \frac{m\omega q^2}{2} \cot Q . \quad (4.63)$$

Entonces las ecuaciones de la transformación son:

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = m\omega q \cot Q , \quad P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2 \operatorname{sen}^2 Q} , \quad (4.64)$$

de donde se desprende que:

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \operatorname{sen} Q , \quad p = \sqrt{2Pm\omega} \cos Q , \quad (4.65)$$

por lo que comparando con (4.62) tenemos que $f(P) = \sqrt{2Pm\omega}$, con:

$$H = \omega P . \quad (4.66)$$

Tal y como pretendíamos Q es cíclica y el momento P es constante. De este modo las ecuaciones de movimiento para las nuevas variables son:

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \frac{\partial H}{\partial P} = \omega \Rightarrow Q = \omega t + \alpha , \\ \dot{P} &= -\frac{\partial H}{\partial Q} = 0 \Rightarrow P = \frac{E}{\omega} = \text{cte}. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Luego de (4.64),

$$\begin{aligned} q(t) &= \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \operatorname{sen}(\omega t + \alpha) , \\ p(t) &= \sqrt{2mE} \cos(\omega t + \alpha) . \end{aligned} \quad (4.68)$$

4.3. Transformaciones de Mathieu-Lie

Estas transformaciones fueron introducidas por Mathieu y desarrolladas por Sophus Lie. Consideraremos primero el caso sin dependencia explícita temporal. En estas transformaciones se exige que la forma diferencial:

$$\sum_{i=1}^n p_i dq_i = \sum_{i=1}^n P_i dQ_i , \quad (4.69)$$

sea invariante, con lo que, comparando con (4.29) se requiere que la función generatriz sea nula. Es directo observar de (4.69) que las q_i y Q_i no pueden ser independientes una de la otra pues de lo contrario tendríamos que todos los p_i y P_i se anularían. Deben por lo tanto satisfacer al menos una relación genérica de la forma,

$$f(q_1, \dots, q_n; Q_1, \dots, Q_n) = 0 . \quad (4.70)$$

Una transformación de Mathieu-Lie viene dada por la conservación de la forma diferencial (4.69) y por las relaciones auxiliares:

$$\begin{array}{l} \Omega_1(q_1, \dots, q_n; Q_1, \dots, Q_n) = 0, \\ \vdots \\ \Omega_m(q_1, \dots, q_n; Q_1, \dots, Q_n) = 0. \end{array} \quad (4.71)$$

Donde $1 \leq m \leq n$. Cuando $m = n$ tenemos la forma más restringida de una transformación de Mathieu que, como veremos, corresponderá a una transformación de punto en el espacio de configuración.

A la hora de tener en cuenta las ligaduras (4.71) en (4.69) podemos proceder de las siguientes formas:

- (a) Despejar m coordenadas en función del resto a partir de (4.71), que ya son variables independientes, y sustituir sus variaciones en la forma diferencial invariante.
- (b) Mediante el método de los multiplicadores de Lagrange, manteniéndose así la simetría en el manejo de todas las coordenadas que aparecen en las ecuaciones auxiliares.

Si seguimos el camino (b) tenemos que:

$$\sum_{i=1}^n (p_i dq_i - P_i dQ_i) = \lambda_1 d\Omega_1 + \dots + \lambda_m d\Omega_m, \quad (4.72)$$

con $\lambda_I = \lambda_I(q, Q)$, $1 \leq I \leq m$. Igualando los coeficientes de los diferenciales de q_i y Q_i en (4.72) llegamos a que:

$$\begin{aligned} p_i &= \lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial q_i} + \dots + \lambda_m \frac{\partial \Omega_m}{\partial q_i}, \\ P_i &= - \left(\lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial Q_i} + \dots + \lambda_m \frac{\partial \Omega_m}{\partial Q_i} \right). \end{aligned} \quad (4.73)$$

Tenemos, por tanto, $2n + m$ ecuaciones para determinar las $2n$ nuevas variables, (Q, P) , como funciones de los (q, p) y los multiplicadores λ_I , $1 \leq I \leq m$. A partir de las n primeras ecuaciones en (4.73) podemos despejar las $Q_i = Q_i(q, p)$ y luego sustituyendo en las restantes n ecuaciones obtenemos también $P_i = P_i(q, p)$.

Para que este procedimiento sea viable se requiere que $\|\partial^2 \sum_{I=1}^m \lambda_I \Omega_I / \partial q \partial Q\| \neq 0$.

Finalmente, empleando las m ecuaciones auxiliares (4.71) podemos determinar los λ_I , $1 \leq I \leq m$. Comparando la forma diferencial (4.69) con (4.29) se tiene que para que la transformación resultante sea canónica se requiere,

$$K(Q, P, t) = H(q(Q, P), p(Q, P), t). \quad (4.74)$$

Un caso especial de transformaciones de Mathieu-Lie son las transformaciones de punto de la dinámica de Lagrange para $m = n$. En este caso, a partir de las n ecuaciones auxiliares podemos expresar:

$$\begin{aligned} q_1 &= f_1(Q_1, \dots, Q_n), \\ &\vdots \\ &\vdots \\ q_n &= f_n(Q_1, \dots, Q_n). \end{aligned} \quad (4.75)$$

Insertando estas ecuaciones en (4.69) deducimos,

$$\sum_{i,j} p_j \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} dQ_i = \sum_i P_i dQ_i, \quad (4.76)$$

y, por tanto:

$$P_i = \sum_j p_j \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} = \sum_j p_j \frac{\partial f_j}{\partial Q_i}. \quad (4.77)$$

Que es idéntica a (4.5). Vemos, por tanto, que toda transformación de punto de la mecánica de Lagrange independiente de tiempo, se puede considerar como una transformación particular de Mathieu-Lie para $m = n$. Es un ejemplo más de la generalidad de las transformaciones canónicas frente a lo restringido de las transformaciones de la mecánica de Lagrange.

Consideremos a continuación dependencia explícita temporal,

$$Q = Q(q, p, t), \quad P = P(q, p, t). \quad (4.78)$$

Consideramos entonces (4.69) en la forma,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n p_i dq_i - H dt &= \sum_{i=1}^n P_i dQ_i - K dt, \\ \Omega_I(q_1, \dots, q_n; Q_1, \dots, Q_n; t) &= 0, \quad k = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (4.79)$$

donde comparando con (4.29) hemos exigido de nuevo que la función generatriz sea nula (salvo la adición de una función de tiempo). Introduciendo los multiplicadores de Lagrange, tenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (p_i dq_i - P_i dQ_i) - (H - K) dt &= \\ &= \sum_{I=1}^m \sum_{i=1}^n \left(\lambda_I \frac{\partial \Omega_I}{\partial q_i} dq_i + \lambda_I \frac{\partial \Omega_I}{\partial Q_i} dQ_i \right) + \sum_{I=1}^m \lambda_I \frac{\partial \Omega_I}{\partial t} dt. \end{aligned} \quad (4.80)$$

En la expresión anterior podemos considerar los diferenciales de las variables canónicas y del tiempo como independientes ya que en la integral canónica las trayectorias en el espacio de fases son arbitrarias alrededor del movimiento real del sistema. Por tanto, a partir del coeficiente que multiplica a dt :

$$K = H + \lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial t} + \dots + \lambda_m \frac{\partial \Omega_m}{\partial t}, \quad (4.81)$$

junto con las ecuaciones (4.73) que se deducen análogamente al caso independiente de t y nos garantizan el poder expresar $Q(q, p, t)$ y $P(q, p, t)$ si $\|\partial^2 \sum_{I=1}^m \lambda_I \Omega_I / \partial q \partial Q\| \neq 0$. Si comparamos las ecuaciones (4.73) junto con la expresión para el nuevo Hamiltoniano observamos que $\sum_I \lambda_I \Omega_I(q, Q, t)$ se comportan de la misma forma que una función generatriz del tipo 1. Si procedemos de forma análoga al caso de transformaciones de Mathieu-Lie independientes de t , es directo comprobar que para $m = n$ se tienen de nuevo transformaciones de punto de la mecánica Lagrangiana dependientes de tiempo.

• Ejemplo

Consideremos la relación:

$$Q^2 q^2 = a \quad (4.82)$$

Tenemos por (4.73):

$$\begin{aligned} p &= \lambda \frac{\partial \Omega}{\partial q} = 2\lambda q Q^2 \Rightarrow Q = \sqrt{\frac{p}{2\lambda q}}, \\ P &= -\lambda \frac{\partial \Omega}{\partial Q} = -2\lambda Q q^2. \end{aligned} \quad (4.83)$$

Y sustituyendo en las expresiones anteriores la relación (4.73) tenemos:

$$\lambda^2 = -\frac{P}{2a^{3/2}p} = \frac{(pq)^2}{(2a)^2}. \quad (4.84)$$

De esta forma podemos obtener, de nuevo por sustitución, $P = P(q, p)$ y $Q = Q(q, p)$:

$$\begin{aligned} P &= -\frac{pq^2}{\sqrt{a}}, \\ Q &= \sqrt{\frac{a}{q^2}}. \end{aligned} \quad (4.85)$$

4.4. Forma diferencial bilineal invariante

Buscamos el invariante básico de las transformaciones canónicas, que sea la condición necesaria y suficiente que caracterice dichas transformaciones. Ya las hemos caracterizado a través de la función generatriz F , pero ahora buscamos un invariante geométrico. En el caso de las transformaciones de punto de la mecánica de Lagrange ya vimos que dejaban invariante el diferencial de longitud $a_{ik}(q) dq_i dq_k = d\bar{s}^2$, en el sentido de que en las nuevas coordenadas $d\bar{s}^2$ adopta una forma análoga, aun cuando la matriz $a_{ik}(q)$ no será invariante en general. En el espacio de fases llegaremos a que el invariante geométrico es una forma diferencial bilineal con significado de área y no de desplazamiento como en el caso de la dinámica Lagrangiana, $d\bar{s} = \sqrt{d\bar{s}^2}$.

Para una transformación canónica que no involucre el tiempo de forma explícita, (4.29) es equivalente a:

$$\sum_{i=1}^n p_i \delta q_i = \sum_{\alpha=i}^n P_i \delta Q_i + \delta F , \quad (4.86)$$

dado que $K = H$ y siempre podemos tomar $\partial F / \partial t = 0$. En (4.86) hemos introducido el símbolo δ en lugar de d para hacer hincapié en que las variaciones anteriores son a un tiempo fijo. La expresión anterior también se puede reescribir como:

$$\sum_{i=1}^n p_i \delta q_i - \sum_{i=1}^n P_i \delta Q_i = \delta F . \quad (4.87)$$

Esta última expresión nos recuerda a aquélla que teníamos para el trabajo producido por una fuerza conservativa, que verificaba que su trabajo alrededor de cualquier circuito cerrado en torno a un punto era cero, y, por lo tanto, dicho trabajo se podría considerar como una función de punto, análogamente a (4.87).

Un criterio similar lo podemos seguir aquí. Recordando la definición de circulación de Helmholtz, o simplemente circulación introducida en la sección 3.9,

$$\Gamma = \oint \sum_{i=1}^n p_i dq_i , \quad (4.88)$$

donde la integral de línea se toma a lo largo de cualquier circuito cerrado en el espacio de fases (q, p) . Es directo a partir de (4.87) que se verifica,

$$\Gamma = \oint \sum_{i=1}^n p_i \delta q_i = \oint \sum_{i=1}^n P_i \delta Q_i , \quad (4.89)$$

puesto que:

$$\oint \delta F = 0 . \quad (4.90)$$

La circulación Γ es así un invariante con respecto a cualquier transformación canónica. Merece la pena enfatizar que la circulación Γ , al hacer un cambio de variable genérico, conservará su valor, dado que tiene un significado geométrico intrínseco. Lo relevante es que sólo cuando la transformación es canónica tiene además la misma expresión en términos de las nuevas variables.

En lugar de pensar en el espacio de fases de $2n$ -dimensiones podemos pensar en una curva cerrada L en el espacio de configuración de n -dimensiones con un campo vectorial p_i asociado a cada punto q_i , como podemos ver en la figura (4.1), dado que a lo largo de una curva cualquiera $q_i = q_i(\tau)$ y $p_i = p_i(\tau)$, siendo τ el parámetro empleado para la descripción de la misma. Por tanto, el conjunto (q_1, \dots, q_n) da las coordenadas del punto en el espacio de configuración, mientras que el conjunto (p_1, \dots, p_n) determina un campo vectorial adscrito a la curva L . Ahora queremos mostrar cómo a partir de este invariante integral Γ se puede deducir un invariante diferencial. Para ello sean u y v

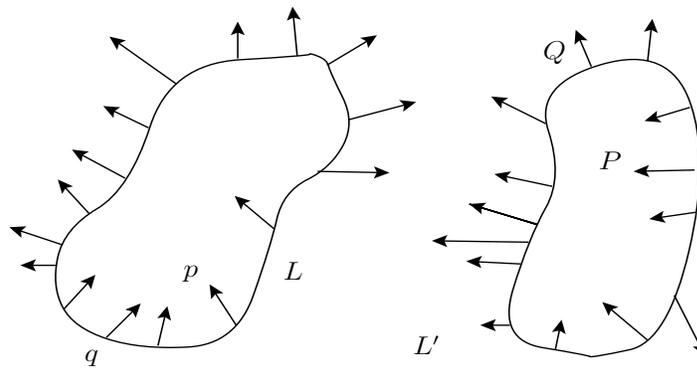


Figura 4.1: A cada punto $q(\tau)$ y $Q(\tau)$ de los respectivos espacios de configuración se les asocia un vector $p(\tau)$ y $P(\tau)$, respectivamente.

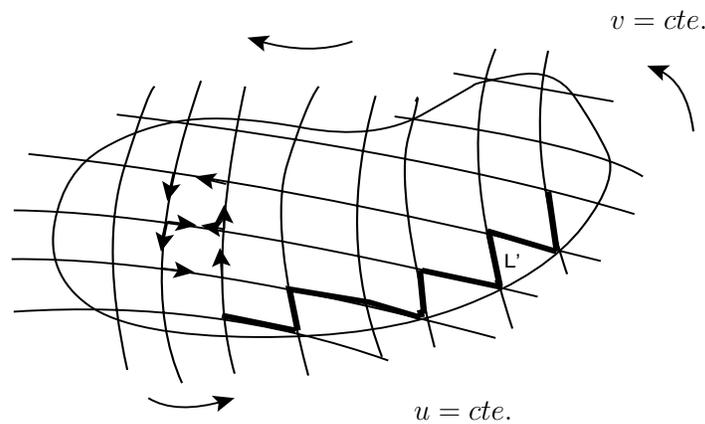


Figura 4.2: La única contribución viene del contorno L' .

dos parámetros que parametrizan una superficie cuyo contorno es la curva L . Sobre dicha superficie se construye una maya a partir de la intersección de las curvas sobre la superficie con u y v constantes. Se calcula entonces la circulación sobre cada celda de dicha maya que esté contenida completamente en la superficie limitada por la curva L , tal y como se muestra en la figura 4.2, y se suma sobre todas las celdas. Notemos que la integral sobre las líneas interiores que separan dos celdas se cancela dado que se recorren en sentidos opuestos, véase de nuevo la figura 4.2, con lo que la suma de la circulación sobre cada celda se reduce a calcular la circulación sobre la curva cerrada L' formada a partir de la unión de los segmentos que no son compartidos entre dos celdas. Al hacer la malla cada vez más densa, la integral de la circulación a lo largo de L' se aproxima a la integral curvilínea a lo largo de L . En el límite ambas son iguales.

Procedamos a calcular ahora la circulación (4.88) a lo largo de una celda arbitraria contenida en la superficie. Introducimos la notación de que dada una función $f(u, v)$ en la región encerrada por la

curva L , indicamos por $d'f$ el cambio de f debido sólo al cambio de v , manteniendo u constante:

$$d'f = \frac{\partial f}{\partial v} dv . \quad (4.91)$$

De forma similar, $d''f$ representará el cambio de f debido sólo al cambio de u , manteniendo v constante:

$$d''f = \frac{\partial f}{\partial u} du . \quad (4.92)$$

La circulación alrededor de un paralelogramo infinitesimal formado por líneas paramétricas v y $v + dv$ intersectadas con las líneas u y $u + du$ puede ser escrito como:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n [d' (p_i d'' q_i) - d'' (p_i d' q_i)] = \\ & = \sum_{i=1}^n (d' p_i d'' q_i - d'' p_i d' q_i) = \\ & = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial q_i}{\partial u} \frac{\partial p_i}{\partial v} - \frac{\partial p_i}{\partial u} \frac{\partial q_i}{\partial v} \right) du dv . \end{aligned} \quad (4.93)$$

Y obtenemos la transformación de una integral de línea en una integral de superficie:

$$\oint_L \sum_{i=1}^n p_i dq_i = \int_K \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial q_i}{\partial u} \frac{\partial p_i}{\partial v} - \frac{\partial p_i}{\partial u} \frac{\partial q_i}{\partial v} \right) du dv . \quad (4.94)$$

Dado que la circulación ha quedado reescrita como una integral de superficie sobre la región encerrada por la curva cerrada L y, puesto que esta región es totalmente arbitraria, la invariancia de Γ implica la invariancia del integrando:

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial q_i}{\partial u} \frac{\partial p_i}{\partial v} - \frac{\partial p_i}{\partial u} \frac{\partial q_i}{\partial v} \right) , \quad (4.95)$$

bajo una transformación canónica. Más concretamente, fijémonos que los pasos anteriores realizados con las variables (p, q) también los podríamos haber realizado análogamente con las variables (P, Q) y el resultado habría sido el mismo dado que Γ tiene la misma expresión en unas variables y en otras, así cuando hablamos de invarianza nos referimos a que:

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial q_i}{\partial u} \frac{\partial p_i}{\partial v} - \frac{\partial p_i}{\partial u} \frac{\partial q_i}{\partial v} \right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial Q_i}{\partial u} \frac{\partial P_i}{\partial v} - \frac{\partial P_i}{\partial u} \frac{\partial Q_i}{\partial v} \right) . \quad (4.96)$$

Equivalentemente la siguiente forma diferencial también es invariante:

$$\sum_{i=1}^n (d' p_i d'' q_i - d'' p_i d' q_i) = \sum_{i=1}^n (d' P_i d'' Q_i - d'' P_i d' Q_i) . \quad (4.97)$$

Esta es la forma bilineal diferencial invariante bajo una transformación canónica. La invariancia de ésta, o de (4.95), es condición necesaria y suficiente para que una transformación sea canónica. Hemos visto que la condición es necesaria, veamos que también es suficiente.

Supongamos que la circulación se conserva. Consideremos la transformación:

$$Q = Q(q, p, t), \quad P = P(q, p, t) . \quad (4.98)$$

Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n P_i dQ_i + dF - K dt &= \sum_i P_i \delta Q_i + \sum_i P_i \frac{\partial Q_i}{\partial t} dt + \delta F + \frac{\partial F}{\partial t} dt - K dt \\ &= \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n P_i \delta Q_i + \delta F \right)}_{\text{Invariancia de } \Gamma} + \sum_{i=1}^n P_i \frac{\partial Q_i}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial t} dt - K dt \\ &\quad \text{igual a } \sum_{i=1}^n p_i dq_i \\ &= \sum_{i=1}^n p_i dq_i + \sum_{i=1}^n P_i \frac{\partial Q_i}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial t} dt - K dt \\ &= \sum_{i=1}^n p_i dq_i - H dt , \end{aligned} \quad (4.99)$$

identificando

$$K = H + \sum_i P_i \frac{\partial Q_i}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial t} , \quad (4.100)$$

con lo que llegamos a (4.29),

$$\sum_i p_i dq_i - H dt = \sum_i P_i dQ_i - K dt + dF , \quad (4.101)$$

y en efecto el cambio (4.98) es canónico.

4.4.1. Los corchetes de Lagrange

Los corchetes o paréntesis de Lagrange se definen como:

$$\{u, v\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial q_i}{\partial u} \frac{\partial p_i}{\partial v} - \frac{\partial p_i}{\partial u} \frac{\partial q_i}{\partial v} \right) = \sum_{\alpha, \beta=1}^{2n} \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial u} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi_\beta}{\partial v} , \quad (4.102)$$

donde las variables dinámicas son función de dos parámetros y hemos empleado la notación compacta introducida en (3.42) y, al igual que en el capítulo anterior, las letras griegas van desde 1 a $2n$. En el resto de este capítulo emplearemos el criterio de suma de Einstein sobre índices griegos repetidos. De (4.94) se tiene,

$$\oint_L \sum_{i=1}^n p_i dq_i = \int_K \{u, v\} du dv , \quad (4.103)$$

y como la superficie K es arbitraria se sigue que los corchetes de Lagrange son invariantes bajo transformaciones canónicas:

$$\{u, v\}_{p,q} = \{u, v\}_{P,Q} , \quad (4.104)$$

donde los subíndices indican las variables empleadas en el cálculo de los corchetes de Lagrange. En particular, tenemos los siguientes corchetes de Lagrange,

$$\{q_i, q_k\} = 0, \quad \{p_i, p_k\} = 0, \quad \{q_i, p_k\} = \delta_{ik} , \quad (4.105)$$

donde u y v son las variables canónicas y se denominan corchetes de Lagrange fundamentales.

Teorema

Es condición necesaria y suficiente para que la transformación $\eta_\alpha = \eta_\alpha(\xi, t)$ sea canónica que se verifique:

$$\{\eta_\alpha, \eta_\beta\}_\xi = \gamma_{\alpha\beta} = \{\eta_\alpha, \eta_\beta\}_\eta . \quad (4.106)$$

Demostración.-

Que es necesaria ya lo hemos visto. Comprobemos que es suficiente. Para ello es suficiente con demostrar que para cualquier par de variables dinámicas u, v tenemos:

$$\{u, v\}_\xi = \{u, v\}_\eta , \quad (4.107)$$

según hemos visto en la subsección anterior. Calculemos $\{u, v\}_\xi$, sabiendo que se verifica (4.106):

$$\begin{aligned} \{u, v\}_\eta &= \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial u} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \eta_\beta}{\partial v} = \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial \xi_\lambda} \frac{\partial \xi_\lambda}{\partial u} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \eta_\beta}{\partial \xi_\rho} \frac{\partial \xi_\rho}{\partial v} = \\ &= \underbrace{\frac{\partial \eta_\alpha}{\partial \xi_\lambda} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \eta_\beta}{\partial \xi_\rho}}_{\{\xi_\lambda, \xi_\rho\}_\eta} \frac{\partial \xi_\lambda}{\partial u} \frac{\partial \xi_\rho}{\partial v} = \frac{\partial \xi_\lambda}{\partial u} \gamma_{\lambda\rho} \frac{\partial \xi_\rho}{\partial v} = \{u, v\}_\xi . \\ \{\xi_\lambda, \xi_\rho\}_\eta &= \{\xi_\lambda, \xi_\rho\}_\xi = \gamma_{\lambda\rho} \end{aligned}$$

4.4.2. Relación entre los corchetes de Poisson y de Lagrange

Consideremos que tenemos $2n$ variables dinámicas independientes, función de las ξ_α y t , esto es $u_\alpha = u_\alpha(\xi, t)$. Existe la siguiente relación entre los corchetes de Lagrange y Poisson:

$$\{u_\alpha, u_\sigma\} [u_\beta, u_\sigma] = \delta_{\alpha\beta} . \quad (4.108)$$

La demostración es directa,

$$\begin{aligned} \{u_\alpha, u_\sigma\} [u_\beta, u_\sigma] &= \frac{\partial \xi_\lambda}{\partial u_\alpha} \frac{\partial \xi_\rho}{\partial u_\sigma} \gamma_{\lambda\rho} \frac{\partial u_\beta}{\partial \xi_\mu} \gamma_{\mu\nu} \frac{\partial u_\sigma}{\partial \xi_\nu} = \frac{\partial \xi_\lambda}{\partial u_\alpha} \gamma_{\lambda\rho} \frac{\partial u_\beta}{\partial \xi_\mu} \gamma_{\mu\nu} \underbrace{\frac{\partial \xi_\rho}{\partial u_\sigma} \frac{\partial u_\sigma}{\partial \xi_\nu}}_{\delta_{\rho\nu}} \\ &= \frac{\partial \xi_\lambda}{\partial u_\alpha} \gamma_{\lambda\rho} \frac{\partial u_\beta}{\partial \xi_\mu} \gamma_{\mu\nu} \delta_{\rho\nu} = \frac{\partial \xi_\lambda}{\partial u_\alpha} \gamma_{\lambda\rho} \gamma_{\mu\rho} \frac{\partial u_\beta}{\partial \xi_\mu} = \frac{\partial \xi_\lambda}{\partial u_\alpha} \delta_{\lambda\mu} \frac{\partial u_\beta}{\partial \xi_\mu} = \delta_{\alpha\beta} . \end{aligned}$$

Si tomamos $\eta_\alpha \equiv u_\alpha$ (nuevas variables canónicas),

$$\sum_{\sigma=1}^{2n} \{\eta_\alpha, \eta_\sigma\} [\eta_\beta, \eta_\sigma] = \delta_{\alpha\beta} . \quad (4.109)$$

Así los $[\eta_\alpha, \eta_\beta]$, paréntesis de Poisson fundamentales, son invariantes bajo una transformación canónica dado que la inversa de una matriz, si existe, es única.

$$[\eta_k, \eta_i]_\eta = \gamma_{ki} = [\eta_k, \eta_i]_\xi . \quad (4.110)$$

De este modo, para cualquier par de variables dinámicas, R y S , tenemos que:

$$\begin{aligned} [R, S]_\xi &= \frac{\partial R}{\partial \xi_\lambda} \gamma_{\lambda\rho} \frac{\partial S}{\partial \xi_\rho} = \frac{\partial R}{\partial \eta_\alpha} \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial \xi_\lambda} \gamma_{\lambda\rho} \frac{\partial \eta_\beta}{\partial \xi_\rho} \frac{\partial S}{\partial \eta_\beta} \\ &= \frac{\partial R}{\partial \eta_\alpha} [\eta_\alpha, \eta_\beta]_\xi \frac{\partial S}{\partial \eta_\beta} = \frac{\partial R}{\partial \eta_\alpha} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial S}{\partial \eta_\beta} = [R, S]_\eta . \end{aligned} \quad (4.111)$$

Así pues, los corchetes de Poisson de un par cualquiera de variables son también invariantes al serlo los corchetes de Lagrange. Deducimos por tanto el siguiente teorema:

Teorema

Es condición necesaria y suficiente para que una transformación sea canónica que los corchetes de Poisson fundamentales sean invariantes.

Demostración.-

Que es necesaria ya lo hemos visto. Veamos que es suficiente. Esta condición garantiza la invariancia de un par arbitrario de corchetes de Poisson y con ello la invariancia de los paréntesis de Lagrange en virtud de (4.108). Por tanto tenemos garantizada la invariancia de la circulación Γ que implica el carácter canónico de la transformación.

Siempre podemos tomar la u y la v como miembros de un conjunto más amplio de $2n$ variables independientes, ya que si no son independientes no se puede construir los paréntesis de Lagrange puesto que han de tomarse como coordenadas de una superficie.

4.5. La forma simpléctica de las transformaciones canónicas

Además de por la existencia de una función generatriz hemos caracterizado las transformaciones canónicas por la invarianza de los corchetes de Lagrange y Poisson. Desarrollamos en esta sección otra condición necesaria y suficiente que garantiza el que una transformación sea canónica.

4.5.1. Transformaciones canónicas restringidas

Consideremos en primer lugar las transformaciones canónicas restringidas (el tiempo no aparece en las ecuaciones de transformación):

$$\begin{aligned} Q_i &= Q_i(q, p) , \\ P_i &= P_i(q, p) . \end{aligned} \quad (4.112)$$

Sabemos que el Hamiltoniano es $H(Q, P, t)$, si inicialmente era $H(q, p, t)$ donde hemos invertido las relaciones anteriores:

$$\begin{aligned} q_i &= q_i(Q, P) , \\ p_i &= p_i(Q, P) . \end{aligned} \quad (4.113)$$

A partir de la regla de la cadena tenemos,

$$\dot{Q}_i = \sum_j \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) = \sum_j \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) , \quad (4.114)$$

donde también hemos empleado las ecuaciones canónicas. Como es una transformación canónica:

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i} = \sum_j \left(\frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial P_i} + \frac{\partial H}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial P_i} \right) . \quad (4.115)$$

Igualando los coeficientes de las derivadas de H , ya que éste es arbitrario:

$$\left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \right)_{q,p} = \left(\frac{\partial p_j}{\partial P_i} \right)_{Q,P} , \quad \left(\frac{\partial Q_i}{\partial p_j} \right)_{q,p} = - \left(\frac{\partial q_j}{\partial P_i} \right)_{Q,P} . \quad (4.116)$$

Ahora para los momentos P_i :

$$\dot{P}_i = \sum_j \left(\frac{\partial P_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial P_i}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) = \sum_j \left(\frac{\partial P_i}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial P_i}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) . \quad (4.117)$$

Además por ser la transformación canónica:

$$\dot{P}_i = - \frac{\partial H}{\partial Q_i} = - \sum_j \left(\frac{\partial H}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} + \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial Q_i} \right) . \quad (4.118)$$

Por lo tanto:

$$\left(\frac{\partial P_i}{\partial p_j} \right)_{q,p} = \left(\frac{\partial q_j}{\partial Q_i} \right)_{Q,P} , \quad \left(\frac{\partial P_i}{\partial q_j} \right)_{q,p} = - \left(\frac{\partial p_j}{\partial Q_i} \right)_{Q,P} . \quad (4.119)$$

Las ecuaciones (4.116) y (4.119) son las *condiciones directas* para una transformación canónica restringida. Vemos que nos relacionan la matriz de las derivadas primeras de un cambio de variables con su matriz inversa.

Expresemos (4.116) y (4.119) de forma más compacta. Sean $\eta(q, p)$ y $\xi(Q, P)$ las variables canónicas, tenemos:

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_\alpha &= \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial H}{\partial \eta_\beta} \longrightarrow \dot{\eta} = \Gamma \frac{\partial H}{\partial \eta} , \\ \dot{\xi}_\alpha &= \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial \eta_\beta} \dot{\eta}_\beta \longrightarrow \dot{\xi} = M \dot{\eta} , \quad M_{\alpha\beta} = \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial \eta_\beta} . \end{aligned} \quad (4.120)$$

Por tanto:

$$\dot{\xi} = M\dot{\eta} = M\Gamma \frac{\partial H}{\partial \eta}, \quad (4.121)$$

y puesto que,

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_\alpha} = \frac{\partial H}{\partial \xi_\beta} \frac{\partial \xi_\beta}{\partial \eta_\alpha} \longrightarrow \frac{\partial H}{\partial \eta} = M^\top \frac{\partial H}{\partial \xi}. \quad (4.122)$$

Obtenemos sustituyendo en (4.121):

$$\dot{\xi} = M\Gamma M^\top \frac{\partial H}{\partial \xi}. \quad (4.123)$$

Dado que la transformación es canónica:

$$\dot{\xi} = \Gamma \frac{\partial H}{\partial \xi}. \quad (4.124)$$

Comparando la expresión anterior con (4.123) se sigue que:

$$\boxed{M\Gamma M^\top = \Gamma} \quad (4.125)$$

Que es la llamada *Condición Simpléctica*. Esta condición es necesaria y suficiente para que una transformación sea canónica. Hasta ahora hemos visto que es necesaria, para demostrar que es suficiente basta con sustituir (4.125) en (4.123).

Existe otra forma equivalente de expresar (4.125):

$$M\Gamma M^\top = \Gamma \Leftrightarrow M^\top \Gamma M = \Gamma, \quad (4.126)$$

ya que:

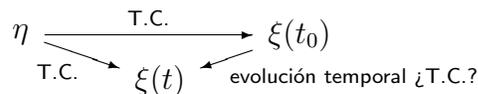
$$M\Gamma = \Gamma M^{\top -1}. \quad (4.127)$$

Multiplicando la ecuación anterior por la izquierda por Γ y por la derecha por $-\Gamma$, y recordando que $\Gamma^2 = -I$, tenemos,

$$\Gamma M\Gamma (-\Gamma) = \Gamma^2 M^{\top -1} (-\Gamma) \Rightarrow \Gamma M = M^{\top -1} \Gamma \Rightarrow \boxed{M^\top \Gamma M = \Gamma}. \quad (4.128)$$

4.5.2. Transformaciones canónicas dependientes del tiempo

Sea $\xi = \xi(\eta, t)$ una transformación canónica que depende explícitamente del tiempo, siendo t en el espacio de fases no más que un parámetro continuo. Consideremos la transformación canónica $\eta \rightarrow \xi(t_0) = \xi(\eta, t_0)$, para un valor fijo de $t = t_0$. De este modo la transformación final $\xi(\eta, t)$ la podemos considerar como la resultante de la composición de la transformación canónica $\eta \rightarrow \xi(t_0) = \xi(\eta, t_0)$ seguida de la evolución temporal desde $t_0 \rightarrow t$ de las nuevas variables canónicas $\xi(t)$,



Ya que t_0 es una constante, la transformación canónica $\eta \rightarrow \xi(\eta, t_0)$ cumplirá la condición simpléctica, porque hemos visto en la subsección anterior que es condición necesaria y suficiente para que una transformación sea canónica. Queremos ver que éste es también el caso para la transformación $\xi(\eta, t_0) \rightarrow \xi(\eta, t)$, que corresponde con la evolución temporal de las nuevas variables canónicas.

Para ello vamos a considerar el caso de transformaciones canónicas que dependen de un parámetro continuo genérico.

4.5.3. Transformación canónica infinitesimal

Una transformación canónica dependiente de un parámetro continuo puede considerarse como una sucesión de transformaciones canónicas infinitesimales. Sean las variables canónicas originales $\eta(q, p)$ y las nuevas variables $\xi(Q, P)$,

$$Q_i = Q_i(q, p, \theta) \ , \ P_i = P_i(q, p, \theta) \ , \quad (4.129)$$

tal que para $\theta = 0$ se tiene $Q_i(q, p, 0) = q_i$ y $P_i(q, p, 0) = p_i$. Consideremos la transformación canónica infinitesimal alrededor de $\theta = 0$,

$$\left. \begin{aligned} Q_i &= q_i + \delta q_i \ , \\ P_i &= p_i + \delta p_i \ , \\ \xi &= \eta + \delta \eta \ . \end{aligned} \right\} \quad (4.130)$$

A primer orden en $\delta\theta$ siempre podemos tomar la función generatriz del tipo 2,

$$F_2(q, P, t) = \sum_i q_i P_i + \delta\theta G(q, P, \theta) \ . \quad (4.131)$$

Recordemos que F_2 debe cumplir (4.32) y (4.131) lo cumple siempre dado que difiere de $\sum_i q_i P_i$ (cuyo Hessiano es uno) por cantidades infinitesimales. A primer orden podemos sustituir $\delta\theta G(q, P, \theta)$ por $\delta\theta G(q, p, \theta)$, ya que la diferencia entre P y p es orden $\delta\theta$. De acuerdo a (4.31), las derivadas de la función generatriz nos dan:

$$\begin{aligned} p_j &= \frac{\partial F_2}{\partial q_j} = P_j + \delta\theta \frac{\partial G}{\partial q_j} \ , \\ \delta p_j &= P_j - p_j = -\delta\theta \frac{\partial G}{\partial q_j} \ , \\ Q_j &= \frac{\partial F_2}{\partial P_j} = q_j + \delta\theta \frac{\partial G}{\partial P_j} \ , \\ \delta q_j &= \delta\theta \frac{\partial G}{\partial P_j} = \delta\theta \frac{\partial G}{\partial p_j} + \mathcal{O}(\delta\theta^2) \ . \end{aligned} \quad (4.132)$$

En definitiva:

$$\boxed{\delta q_j = \delta\theta \frac{\partial G}{\partial p_j} \ , \ \delta p_j = -\delta\theta \frac{\partial G}{\partial q_j} \ , \ G = G(q, p, \theta)} \quad (4.133)$$

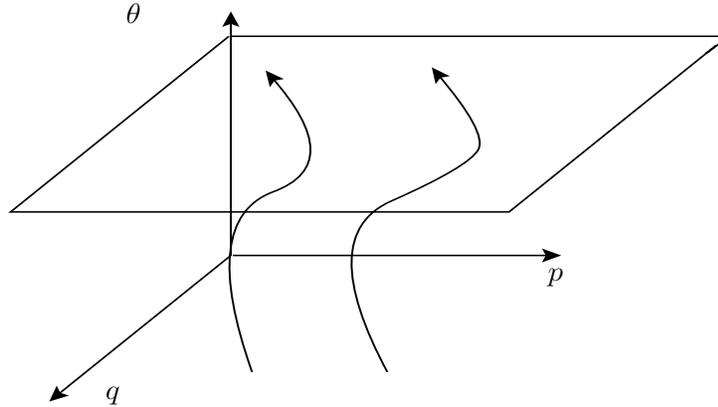


Figura 4.3: Órbitas en función del parámetro θ , resultantes de resolver la ecuación diferencial de primer orden (4.137).

De forma más compacta,

$$\delta\eta = \delta\theta \Gamma \frac{\partial G}{\partial \eta} , \tag{4.134}$$

y a $G = G(q, p, \theta)$ se le llama generador infinitesimal. La composición sucesiva de transformaciones canónicas infinitesimales da lugar a transformaciones canónicas finitas dependientes de un parámetro θ . Esta aplicación sucesiva puede englobarse en una ecuación diferencial para obtener la transformación canónica finita. Basta para ello considerar como coordenadas iniciales:

$$\eta(\theta) = \{Q_i(q, p, \theta), P_i(q, p, \theta)\} , \tag{4.135}$$

en lugar de $Q_i(q, p, 0)$ y $P_i(q, p, 0)$, pero el procedimiento es del todo análogo. Realizando una transformación canónica infinitesimal a:

$$\begin{aligned} Q_i &= Q_i(q, p, \theta + d\theta) , \\ P_i &= P_i(q, p, \theta + d\theta) . \end{aligned} \tag{4.136}$$

Aplicando directamente (4.134), tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta(\theta)}{\partial \theta} &= \Gamma \frac{\partial G(\eta(\theta); \theta)}{\partial \eta(\theta)} , \\ \eta(\theta = 0) &= \{q; p\} . \end{aligned} \tag{4.137}$$

Gráficamente el resultado de la integración de (4.137) da lugar a las llamadas *órbitas* en función de θ que representamos simbólicamente en la figura 4.3.

Veamos que en efecto se cumple la condición simpléctica para transformaciones canónicas dependientes de un parámetro continuo, caracterizadas por la ecuación diferencial (4.137). Consideremos primero el caso de una transformación infinitesimal, donde en virtud de (4.134) se tiene,

$$M_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \delta\theta \gamma_{\alpha\rho} \frac{\partial^2 G}{\partial \eta_\alpha \partial \eta_\rho} . \tag{4.138}$$

En lenguaje matricial la expresión anterior es:

$$M = I + \delta\theta\Gamma \frac{\partial^2 G}{\partial\eta\partial\eta}, \quad (4.139)$$

con lo que

$$M^\top = I - \delta\theta \frac{\partial^2 G}{\partial\eta\partial\eta} \Gamma. \quad (4.140)$$

Por lo tanto, a primer orden en $\delta\theta$ se verifica:

$$\begin{aligned} M\Gamma M^\top &= \left(I + \delta\theta\Gamma \frac{\partial^2 G}{\partial\eta^2} \right) \Gamma \left(I - \delta\theta \frac{\partial^2 G}{\partial\eta^2} \Gamma \right) \\ &= \Gamma + \delta\theta \left\{ \Gamma \frac{\partial^2 G}{\partial\eta^2} \Gamma - \Gamma \frac{\partial^2 G}{\partial\eta^2} \Gamma \right\} = \Gamma. \end{aligned} \quad (4.141)$$

Y vemos que la condición simpléctica es condición necesaria para las transformaciones canónicas infinitesimales.

Comprobemos que también es suficiente. Dada la transformación infinitesimal:

$$\xi_\alpha(\theta + d\theta) = \eta_\alpha + \delta\theta\gamma_{\alpha\rho}Y_\rho(\eta, \theta), \quad (4.142)$$

hemos de demostrar si se cumple la condición de integrabilidad,

$$\frac{\partial Y_\alpha}{\partial\eta_\beta} = \frac{\partial Y_\beta}{\partial\eta_\alpha}, \quad (4.143)$$

en cuyo caso podremos identificar $Y_\rho = \left. \frac{\partial G(\eta, t_0)}{\partial\eta_\rho} \right|_{t_0}$, y entonces tenemos automáticamente la función generatriz $F_2 = \sum_i q_i P_i + \delta\theta G(\eta, \theta)$ y es canónica. Apliquemos la condición simpléctica, lo que requiere el cálculo de las matrices M y M^\top a partir de (4.142):

$$M_{\alpha\beta} = \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial \eta_\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \delta\theta\gamma_{\alpha\rho} \frac{\partial Y_\rho}{\partial \eta_\beta}, \quad \Rightarrow M = I + \delta\theta\Gamma \frac{\partial Y}{\partial \eta}. \quad (4.144)$$

Y para M^\top :

$$M^\top = I - \delta\theta \left(\frac{\partial Y}{\partial \eta} \right)^\top \Gamma. \quad (4.145)$$

Por la condición simpléctica:

$$M\Gamma M^\top = \left(I + \delta\theta\Gamma \frac{\partial Y}{\partial \eta} \right) \Gamma \left(I - \delta\theta \left(\frac{\partial Y}{\partial \eta} \right)^\top \Gamma \right) = \quad (4.146)$$

$$= \Gamma + dt \left(\Gamma \frac{\partial Y}{\partial \eta} \Gamma - \Gamma \left(\frac{\partial Y}{\partial \eta} \right)^\top \Gamma \right) = \Gamma. \quad (4.147)$$

Por lo tanto:

$$\Gamma \frac{\partial Y}{\partial \eta} \Gamma - \Gamma \left(\frac{\partial Y}{\partial \eta} \right)^\top \Gamma = 0 \Rightarrow \frac{\partial Y}{\partial \eta} = \frac{\partial Y}^{\top} \Rightarrow \frac{\partial Y_\alpha}{\partial \eta_\beta} = \frac{\partial Y_\beta}{\partial \eta_\alpha} , \quad (4.148)$$

se cumple (4.143) y en efecto (4.142) representa una transformación canónica infinitesimal por satisfacer la condición simpléctica.

Para considerar el caso de transformaciones finitas, notemos que si se aplican sucesivamente dos transformaciones canónicas:

$$\xi \xrightarrow{M_1} \xi' \xrightarrow{M_2} \xi'' ,$$

vemos que:

$$M_{\alpha\beta} = \frac{\partial \xi''_\alpha}{\partial \xi_\beta} = \frac{\partial \xi''_\alpha}{\partial \xi'_\lambda} \frac{\partial \xi'_\lambda}{\partial \xi_\beta} = (M_2)_{\alpha\lambda} (M_1)_{\beta\lambda} \Rightarrow M = M_2 M_1 . \quad (4.149)$$

Además:

$$M \Gamma M^\top = M_2 \underbrace{M_1 \Gamma M_1^\top}_\Gamma M_2^\top = M_2 \Gamma M_2^\top = \Gamma , \quad (4.150)$$

con lo que la transformación resultante cumple la condición simpléctica si ésta es satisfecha por cada una de las transformaciones con matrices M_1 y M_2 . Como una transformación canónica finita continua en θ la podemos considerar como resultante de la aplicación sucesiva de transformaciones infinitesimales, se tendrá,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^N M_i \Gamma \prod_{j=1}^N M_j^\top = \Gamma . \quad (4.151)$$

Luego la transformación canónica finita cumple la condición simpléctica. Veamos que es condición suficiente. Obviamente si la condición simpléctica es satisfecha por la transformación canónica finita y continua $\xi(\eta, \theta)$, ésta queda satisfecha por las transformaciones infinitesimales (caso particular cuando θ es infinitesimal). Por lo tanto, al ser las transformaciones infinitesimales canónicas así lo será la transformación finita resultante de componerlas. *Con ello queda demostrado que es condición necesaria y suficiente para que toda transformación continua sea canónica el que satisfaga la condición simpléctica.*

Volviendo a nuestras consideraciones originales, relativas a transformaciones dependientes del tiempo explícitamente, podemos aplicar sin más los resultados obtenidos al estudiar las transformaciones dependientes de un parámetro continuo identificando el parámetro t con θ para la transformación $\xi(\eta, t_0) \rightarrow \xi(\eta, t)$, con la condición inicial obvia $\xi(\eta, t)|_{t_0} = \xi(\eta, t_0)$. Volviendo a considerar la cadena de transformaciones canónicas, $\eta \rightarrow \xi(\eta, t_0) \rightarrow \xi(\eta, t)$, esquematizadas en este diagrama,

$$\begin{array}{ccc} \eta & \xrightarrow{M_1} & \xi(\eta, t_0) \\ & \searrow^{M=M_2 \cdot M_1} & \swarrow_{M_2} \\ & & \xi(\eta, t) \end{array}$$

se deduce que:

$$M_{\alpha\beta} = \frac{\partial \xi_\alpha(\eta, t)}{\partial \eta_\beta} = \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial \xi_\lambda(t_0)} \frac{\partial \xi_\lambda(t_0)}{\partial \eta_\beta} \Rightarrow M = M_2 \cdot M_1 \quad (4.152)$$

La evolución temporal $\xi(t_0) \rightarrow \xi(t)$ es canónica si y sólo si $M_2 \Gamma M_2^\top = \Gamma$, dado que es un caso particular de transformaciones dependientes de un parámetro continuo con G igual a H , como se deduce de comparar las ecuaciones canónicas con (4.137). Con ello, la transformación final resultante cumple necesariamente la condición simpléctica, ya que M_1 la cumple también al corresponder a una transformación independiente de t . Veamos ahora que también es suficiente, es decir, que si $M \Gamma M^\top = \Gamma$, entonces $\xi(\eta, t)$ es una transformación canónica. Dado que M lo cumple para todo tiempo t , en particular lo satisface también para $t = t_0$ y, por tanto, M_1 también cumple la condición simpléctica. Con ello, la transformación $\eta \rightarrow \xi(\eta, t_0)$ es canónica. Por otra parte, dado que tanto M_1 como M cumplen la condición simpléctica, es directo comprobar que entonces M_2 también la satisface y entonces $\xi(\eta, t_0) \rightarrow \xi(\eta, t)$ es una transformación canónica. Por lo tanto, la transformación resultante $\xi(\eta, t)$ es efectivamente una transformación canónica.

4.6. Invariancia de los paréntesis de Poisson y el volumen bajo transformaciones canónicas

- Paréntesis de Poisson. Considérense los paréntesis de Poisson fundamentales:

$$[\eta_\alpha, \eta_\beta]_\eta = \gamma_{\alpha\beta}, \quad [\xi_\alpha, \xi_\beta]_\xi = \gamma_{\alpha\beta}, \quad (4.153)$$

entonces,

$$[\xi_\alpha, \xi_\beta]_\eta = \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial \eta_\lambda} \gamma_{\lambda\rho} \frac{\partial \xi_\beta}{\partial \eta_\rho} = M_{\alpha\lambda} \gamma_{\lambda\rho} M_{\rho\beta}^\top. \quad (4.154)$$

De aquí tenemos dos conclusiones equivalentes,

- Como vimos en el punto anterior $\xi(\eta, t)$ es canónica si y sólo si satisface la condición simpléctica con lo que el resultado final de (4.154) es $\gamma_{\alpha\beta}$.
- Por el teorema de invariancia de los paréntesis de Poisson, tal y como se vio en la subsección 4.4.2, llegamos así mismo a la condición simpléctica $M \Gamma M^\top = \Gamma$.

A partir de (4.111) sabemos que si los paréntesis de Poisson fundamentales se conservan, éste es el caso para los corchetes de Poisson de dos variables dinámicas cualesquiera.

Así vemos que el que *la conservación de los paréntesis de Poisson fundamentales es condición necesaria y suficiente para garantizar que la transformación sea canónica es equivalente a la condición simpléctica según (4.154)*.

- Otro invariante es el *elemento de volumen*. El elemento de volumen en las viejas variables viene dado por:

$$(d\eta) = dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n \quad (4.155)$$

Y en las nuevas:

$$(d\xi) = dQ_1 \dots dQ_n dP_1 \dots dP_n \quad (4.156)$$

La relación entre ambos queda establecida por el Jacobiano de la transformación:

$$(d\xi) = \left| \frac{\partial \xi}{\partial \eta} \right| (d\eta) = |\det(M)|(d\eta) . \quad (4.157)$$

Por otra parte, a partir de la condición simpléctica se tiene que:

$$M^T \Gamma M = \Gamma \Rightarrow (\det M)^2 = 1 \Rightarrow |\det(M)| = 1 \quad (4.158)$$

Así las transformaciones canónicas conservan el elemento de volumen.

En las transformaciones canónicas hemos adoptado el punto de vista pasivo, considerándolas como cambios de coordenadas en el espacio de fases. Éste es el punto de vista pasivo de una transformación. Se considera la misma región (que, por tanto, tendrá el mismo volumen) desde dos sistemas de coordenadas distintos. Lo que ha sido novedoso es ver que el elemento diferencial de volumen también se conserva en su forma bajo una transformación canónica. Para una región finita tenemos:

$$\begin{aligned} V &= \int_{D_{q,p}} dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n = \int_{D_{Q,P}} \underbrace{\left| \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right|}_1 dQ_1 \dots dQ_n dP_1 \dots dP_n = \\ &= \int_{D_{Q,P}} dQ_1 \dots dQ_n dP_1 \dots dP_n , \end{aligned} \quad (4.159)$$

y el volumen de una región arbitraria, calculado de la misma forma en los dos sistemas de coordenadas en el espacio de fases por una transformación canónica, coincide.

4.7. El movimiento de un sistema como una sucesión continua de transformaciones canónicas

Consideremos de nuevo las transformaciones canónicas continuas infinitesimales e identifiquemos $\theta \rightarrow t$ en (4.137). Tenemos,

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial G}{\partial p_i} , \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial G}{\partial q_j} , \quad q(t_0) = q^0 , \quad p(t_0) = p^0 . \quad (4.160)$$

La comparación es directa con las ecuaciones canónicas (3.36) sin más que identificando el Hamiltoniano $H(q, p, t)$ con el generador $G(q, p, t)$. Por lo tanto, observamos que la evolución temporal $q^0 \rightarrow q(t)$ y $p^0 \rightarrow p(t)$ es un caso particular de transformaciones canónicas dependientes de un parámetro continuo. Además para la evolución $t \rightarrow t + dt$ tenemos la función generatriz $F_2 = \sum_i q_i P_i + dt H(q, p, t)$. Y el nuevo Hamiltoniano es:

$$\begin{aligned} K &= H + \frac{\partial F_2}{\partial t} = H + dt \frac{\partial H(q, p, t)}{\partial t} \\ &= H(q, p, t + dt) = H(q, p, t) + \frac{dH(q, p, t)}{dt} dt . \end{aligned} \quad (4.161)$$

Por lo tanto llegamos de nuevo al resultado conocido,

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (4.162)$$

pero en esta ocasión explotando el hecho de que la evolución temporal la podemos considerar como una transformación canónica dependiente de un parámetro continuo, adquiriendo un nuevo significado relativo a conocer el nuevo Hamiltoniano tras el cambio de variables. Además H es el generador de las transformaciones canónicas con t como parámetro. El que $H \neq \text{constante}$, refleja el hecho de que la función generatriz depende explícitamente del tiempo.

Hemos llegado al importante resultado de que todo movimiento de un sistema se puede considerar como una sucesión de transformaciones canónicas infinitesimales. ¡El entero movimiento del sistema a lo largo del tiempo se puede ver como un cambio continuo de coordenadas (q, p) en el espacio de fases de tipo canónico!

Teniendo en cuenta la conservación para las transformaciones canónicas de la circulación y del volumen vistos en las secciones 4.4 y 4.6, respectivamente, es ahora evidente que la evolución temporal conserva la *circulación* y el *volumen* en el espacio fásico y son, por tanto, invariantes integrales. El teorema de Liouville lo vimos en la sección 3.8 desde el punto de vista activo, considerando la variación en la forma de una región en el espacio de fases debido a la evolución temporal. En la sección 3.8 se adoptó la descripción de campo desde el punto de vista de la analogía con el fluido de fases. Ahora la conservación del volumen por la evolución temporal se puede ver según la descripción de partícula del fluido de fases. Siguiendo la demostración dada en (4.159),

$$V = \int_{D(t_0)} dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n \quad (4.163)$$

Realizando la transformación canónica $\xi(t_0) \rightarrow \xi(t)$,

$$\begin{aligned} V &= \int_{D(t_0)} dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n = \\ &= \int_{D(t)} \left| \frac{\partial \xi(t_0)}{\xi(t)} \right| dQ_1 \dots dQ_n dP_1 \dots dP_n = \\ &= \int_{D(t)} dQ_1 \dots dQ_n dP_1 \dots dP_n, \end{aligned} \quad (4.164)$$

que es el teorema de Liouville desde un punto de vista pasivo.

Capítulo 5

Simetrías y teoremas de conservación II. Ecuación de Hamilton-Jacobi

5.1. Familias de transformaciones canónicas. Generadores infinitesimales

Consideremos la transformación canónica:

$$\xi_\alpha = Z_\alpha(\xi^0, t; \theta) , \quad (5.1)$$

continua y diferenciable en θ . Cuando $\theta = 0$ se tiene la transformación identidad:

$$\xi_\alpha^0 = Z_\alpha(\xi^0, t; 0) . \quad (5.2)$$

La transformación (5.1) es además invertible:

$$\xi_\alpha^0 = Z_\alpha^0(\xi_\alpha, t; \theta) . \quad (5.3)$$

Para cada θ tenemos la función generatriz $F^0(\xi^0, t; \theta)$ que en virtud de (4.20) es única salvo por la adición de una función arbitraria de θ y t . Escribimos F^0 para indicar que se toma F como función de ξ^0 y no de las variables ξ .

La función generatriz F^0 debe satisfacer las ecuaciones (4.20). Dichas ecuaciones se pueden expresar de forma más compacta introduciendo la siguiente notación matricial. Sea la matriz,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_n & \mathbb{I}_n \\ \mathbb{O}_n & \mathbb{O}_n \end{pmatrix} , \quad (5.4)$$

donde \mathbb{I}_n y \mathbb{O}_n son las matrices identidad y nula, de orden n , respectivamente. Esta matriz posee la propiedad:

$$\Lambda - \Lambda^\top = \Gamma . \quad (5.5)$$

Los elementos de la matriz Λ los designaremos por $\lambda_{\alpha\beta}$. Con esta notación, (4.20) se pueden reescribir como:¹

$$\lambda_{\alpha\rho}\xi_\rho^0 = \lambda_{\mu\nu} \frac{\partial Z_\mu}{\partial \xi_\alpha^0} Z_\nu + \frac{\partial F^0}{\partial \xi_\alpha^0}. \quad (5.6)$$

Diferenciando respecto de θ , manteniendo ξ_α^0 y t fijos:

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_{\mu\nu} \frac{\partial^2 Z_\mu}{\partial \xi_\alpha^0 \partial \theta} Z_\nu + \lambda_{\mu\nu} \frac{\partial Z_\mu}{\partial \xi_\alpha^0} \frac{\partial Z_\nu}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 F^0}{\partial \xi_\alpha^0 \partial \theta} \\ &= \lambda_{\mu\nu} \frac{\partial Z_\mu}{\partial \xi_\alpha^0} \frac{\partial Z_\nu}{\partial \theta} - \lambda_{\mu\nu} \frac{\partial Z_\mu}{\partial \theta} \frac{\partial Z_\nu}{\partial \xi_\alpha^0} + \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha^0} \left[\lambda_{\mu\nu} \frac{\partial Z_\mu}{\partial \theta} Z_\nu + \frac{\partial F^0}{\partial \theta} \right] \\ &= (\lambda_{\mu\nu} - \lambda_{\nu\mu}) \frac{\partial Z_\mu}{\partial \xi_\alpha^0} \frac{\partial Z_\nu}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha^0} \left[\lambda_{\mu\nu} \frac{\partial Z_\mu}{\partial \theta} Z_\nu + \frac{\partial F^0}{\partial \theta} \right]. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Donde hemos tenido en cuenta que $\gamma_{\mu\nu} = \lambda_{\mu\nu} - \lambda_{\nu\mu}$. Por otra parte, definimos:

$$G^0(\xi^0, t; \theta) = \frac{\partial F^0}{\partial \theta} + \lambda_{\mu\nu} \frac{\partial Z_\mu}{\partial \theta} Z_\nu. \quad (5.8)$$

De esta forma la ecuación (5.7) puede reescribirse en la forma:

$$\gamma_{\mu\nu} \frac{\partial Z_\mu}{\partial \xi_\alpha^0} \frac{\partial Z_\nu}{\partial \theta} + \frac{\partial G^0}{\partial \xi_\alpha^0} = 0. \quad (5.9)$$

La ecuación (5.1) que da lugar a la transformación canónica implica que:

$$\frac{\partial Z_\mu}{\partial \xi_\alpha^0} \frac{\partial Z_\alpha^0}{\partial \xi_\beta} = \delta_{\mu\beta}. \quad (5.10)$$

Teniendo en cuenta este resultado y multiplicando (5.9) por $\gamma_{\beta\rho} \frac{\partial Z_\alpha^0}{\partial \xi_\beta}$:

$$\gamma_{\mu\nu} \underbrace{\frac{\partial Z_\mu}{\partial \xi_\alpha^0} \frac{\partial Z_\alpha^0}{\partial \xi_\beta}}_{\delta_{\mu\beta}} \frac{\partial Z_\nu}{\partial \theta} \gamma_{\beta\rho} + \frac{\partial G^0}{\partial \xi_\alpha^0} \gamma_{\beta\rho} \frac{\partial Z_\alpha^0}{\partial \xi_\beta} = 0. \quad (5.11)$$

Puesto que $\gamma_{\beta\nu}\gamma_{\beta\rho} = \delta_{\nu\rho}$ se tiene:

$$\frac{\partial Z_\rho}{\partial \theta} + \gamma_{\beta\rho} \frac{\partial Z_\alpha^0}{\partial \xi_\beta} \frac{\partial G^0}{\partial \xi_\alpha^0} = 0, \quad (5.12)$$

equivalentemente,

$$\boxed{\frac{\partial Z_\rho}{\partial \theta} = \gamma_{\rho\beta} \frac{\partial G}{\partial \xi_\beta}} \quad (5.13)$$

¹Escribimos Z en lugar de ξ según (5.1).

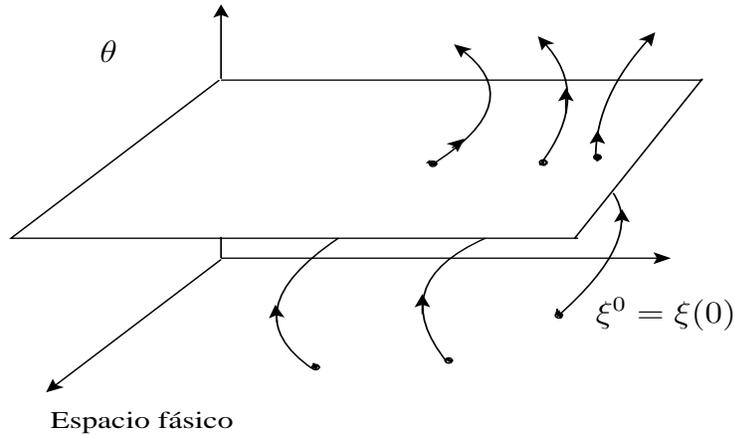


Figura 5.1: Órbitas en función del parámetro θ .

donde $G = G(\xi, t; \theta) = G^0(\xi^0(\xi, t; \theta), t; \theta)$. La ecuación (5.13) representa la ecuación diferencial de la transformación $\xi_\alpha = Z_\alpha(\xi^0, t; \theta)$.

Hasta ahora hemos considerado las transformaciones canónicas desde un punto de vista pasivo (salvo en el caso de la evolución temporal). El mismo tratamiento desde el punto de vista activo se puede realizar para las transformaciones canónicas continuas en θ :

$$\xi_\alpha = \xi_\alpha(\xi^0, t; \theta) \equiv Z_\alpha(\xi^0, t; \theta) , \tag{5.14}$$

y así manteniendo ξ^0, t fijos tenemos que los puntos de coordenadas ξ_α describen una curva uniparamétrica con θ como parámetro. Sobre una de las curvas sólo varía θ y, según (5.13), podemos escribir como ecuación diferencial de las mismas:

$$\frac{d\xi_\rho}{d\theta} = \gamma_{\rho\beta} \frac{\partial G}{\partial \xi_\beta} , \quad \xi_\rho(0) = \xi_\rho^0 . \tag{5.15}$$

Estas ecuaciones, como ya se ha discutido en el capítulo anterior, son completamente similares a las ecuaciones de Hamilton con θ haciendo el papel de t .

Sobre estas curvas (órbitas) cada punto $\xi_\alpha(\theta)$ se relaciona unívocamente con $\xi_\alpha(0)$. Hemos visto que asociada a cada familia uniparamétrica de transformaciones canónicas hay una función $G(\xi, t; \theta)$ llamada el GENERADOR INFINITESIMAL.

Teorema

Toda función continua y diferenciable $G(\xi, t; \theta)$ genera una familia de transformaciones canónicas uniparamétricas que viene dada por:

$$\boxed{\frac{d\xi_\nu}{d\theta} = \gamma_{\nu\mu} \frac{\partial G}{\partial \xi_\mu}} \tag{5.16}$$

y para cada familia uniparamétrica de transformaciones canónicas existe un generador infinitesimal que satisface la ecuación anterior.

Demostración.-

La segunda parte del teorema ya ha sido demostrada. Para ver que la primera parte es correcta consideremos los paréntesis de Lagrange:

$$\{\xi_\alpha^0, \xi_\beta^0\}_\xi = \frac{\partial \xi_\mu}{\partial \xi_\alpha^0} \gamma_{\mu\nu} \frac{\partial \xi_\nu}{\partial \xi_\beta^0} \stackrel{?}{=} \{\xi_\alpha^0, \xi_\beta^0\}_{\xi_0} = \gamma_{\alpha\beta} . \quad (5.17)$$

Es decir, queremos ver si (5.17) se verifica. Para ello se define,

$$\{\xi_\alpha^0, \xi_\beta^0\}_\xi = \ell_{\alpha\beta}(\xi^0, \theta) . \quad (5.18)$$

Para $\theta = 0$ queda claro que $\ell_{\alpha\beta}(\xi^0, 0) = \gamma_{\alpha\beta}$. Analicemos el cambio con θ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell_{\alpha\beta}}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial Z_\mu}{\partial \xi_\alpha^0} \gamma_{\mu\nu} \frac{\partial Z_\nu}{\partial \xi_\beta^0} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha^0} \left(\frac{\partial Z_\mu}{\partial \theta} \gamma_{\mu\nu} \right) \frac{\partial Z_\nu}{\partial \xi_\beta^0} + \frac{\partial Z_\mu}{\partial \xi_\alpha^0} \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^0} \left(\gamma_{\mu\nu} \frac{\partial Z_\nu}{\partial \theta} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha^0} \left(\frac{\partial G}{\partial \xi_\nu} \right) \frac{\partial Z_\nu}{\partial \xi_\beta^0} - \frac{\partial Z_\mu}{\partial \xi_\alpha^0} \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^0} \left(\frac{\partial G}{\partial \xi_\mu} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha^0} \left(\frac{\partial G}{\partial \xi_\nu} \frac{\partial Z_\nu}{\partial \xi_\beta^0} \right) - \frac{\partial G}{\partial \xi_\nu} \frac{\partial^2 Z_\nu}{\partial \xi_\alpha^0 \partial \xi_\beta^0} - \left[\frac{\partial}{\partial \xi_\beta^0} \left(\frac{\partial G}{\partial \xi_\mu} \frac{\partial Z_\mu}{\partial \xi_\alpha^0} \right) - \frac{\partial G}{\partial \xi_\mu} \frac{\partial^2 Z}{\partial \xi_\beta^0 \partial \xi_\alpha^0} \right] \\ &= \frac{\partial^2 G^0}{\partial \xi_\alpha^0 \partial \xi_\beta^0} - \frac{\partial^2 G^0}{\partial \xi_\beta^0 \partial \xi_\alpha^0} - \frac{\partial G}{\partial \xi_\nu} \frac{\partial^2 Z_\nu}{\partial \xi_\alpha^0 \partial \xi_\beta^0} + \frac{\partial G}{\partial \xi_\mu} \frac{\partial^2 Z_\mu}{\partial \xi_\beta^0 \partial \xi_\alpha^0} = 0 . \end{aligned} \quad (5.19)$$

Luego $\ell_{\alpha\beta}$ no depende de θ y, por tanto:

$$\ell_{\alpha\beta}(\xi^0, \theta) = \ell_{\alpha\beta}(\xi^0, 0) = \gamma_{\alpha\beta} . \quad (5.20)$$

Al conservarse los paréntesis de Lagrange fundamentales (5.17) entonces la transformación es canónica.

Ejemplo

Tomemos como generador infinitesimal G a la función:

$$G = -\xi_1 + \frac{1}{2}\xi_2^2 = -q + \frac{1}{2}p^2 , \quad (5.21)$$

que no depende explícitamente en θ . Aplicando (5.15):

$$\begin{aligned} \frac{dq}{d\theta} &= \frac{\partial G}{\partial p} = p , \\ \frac{dp}{d\theta} &= -\frac{\partial G}{\partial q} = 1 . \end{aligned} \quad (5.22)$$

De aquí obtenemos:

$$p = p^0 + \theta , \quad (5.23)$$

y también:

$$q = \int_0^\theta (p^0 + \theta) d\theta + q^0 = q^0 + p^0\theta + \frac{1}{2}\theta^2 . \quad (5.24)$$

5.2. Simetrías y leyes de conservación

En mecánica Lagrangiana hemos visto cómo el teorema de Noether determina la existencia de constantes de movimiento asociadas a aquellas transformaciones continuas en el espacio de configuración que dejan invariantes las ecuaciones de movimiento (es decir $\delta L = 0$ ó $\delta L = dF/dt$). Así mismo dicho teorema proporciona la expresión para calcular dichas magnitudes.

Conclusiones análogas se obtienen de la invariancia del Hamiltoniano bajo familias continuas de transformaciones canónicas. Para ello consideremos una variable dinámica $R(\xi, t)$ que variará a lo largo de la θ -órbita de acuerdo a:

$$\frac{dR}{d\theta} = \frac{\partial R}{\partial \xi_\nu} \frac{d\xi_\nu}{d\theta} = \frac{\partial R}{\partial \xi_\nu} \gamma_{\nu\mu} \frac{\partial G}{\partial \xi_\mu} = [R, G] , \quad (5.25)$$

donde hemos empleado (5.15). Si además $R = R(\xi, t; \theta)$, depende explícitamente de θ , se tiene:

$$\frac{dR}{d\theta} = [R, G] + \frac{\partial R}{\partial \theta} . \quad (5.26)$$

Considerando $R = H(\xi, t; \theta)$, se tiene la expresión análoga a (5.26):

$$\frac{dH}{d\theta} = [H, G] + \frac{\partial H}{\partial \theta} . \quad (5.27)$$

Por otra parte, la función G evoluciona temporalmente de acuerdo a,

$$\frac{dG}{dt} = [G, H] + \frac{\partial G}{\partial t} . \quad (5.28)$$

Para el caso relevante en que H no dependa explícitamente de θ se tiene por tanto que $dH/d\theta = 0$ si $[H, G] = 0$, según (5.27), en cuyo caso la función $H(\xi, t)$ no cambia a lo largo de la órbita. Pero así mismo, si G no depende de t explícitamente se sigue de (5.28) que $G(\xi)$ será una constante de movimiento. Llegamos, por tanto, al interesante resultado de que si $\partial H/\partial \theta = \partial G/\partial t = 0$, y H es invariante a lo largo de las órbitas generadas por G , entonces G lo es a lo largo de las órbitas temporales generadas por H . Vemos cómo un resultado de invariancia de H bajo transformaciones continuas nos ha llevado a la existencia de una constante de movimiento.

Sin embargo, la discusión anterior no ha incidido en el hecho fundamental de que el Hamiltoniano es el generador infinitesimal de la evolución temporal y su cambio bajo una transformación canónica viene dictado por (4.21). Es decir, al determinar el comportamiento de $R(\xi, t; \theta)$ en (5.26) se está tomando esta función con una forma funcional fija en término de las variables $\xi(\xi_0, t; \theta)$ para todo θ y, por tanto, su variación corresponde a evaluar la misma expresión para valores distintos de sus argumentos según cambie θ . Éste no es el caso para el Hamiltoniano $K(\xi, t; \theta)$ ($K(\xi_0, t; 0) = H(\xi_0, t; 0)$). De hecho, dado que para un cambio infinitesimal en θ siempre podemos tomar como función generatriz:

$$F_2(q, P, t) = \sum_i q_i P_i + \delta\theta G(q, P, \theta) , \quad (5.29)$$

según se vio en (4.131), se tiene que,

$$\frac{dK}{d\theta} = \frac{\partial G}{\partial t} , \quad (5.30)$$

en lugar de (5.27). Para deducir la expresión anterior téngase en cuenta (4.31). Si G no depende explícitamente de t se deduce que K es constante a lo largo de la θ -órbita e igual a $K(\xi, t; \theta) = H(\xi_0(\xi, t; \theta), t; 0)$.

La ecuación (5.30) nos lleva a preguntarnos bajo qué condiciones se cumple que $K(\xi, t, \theta) = H(\xi, t, \theta)$. Dado que ambas funciones coinciden para $\theta = 0$ se llega a que sólo cuando $dK/d\theta = dH/d\theta$ se satisfará el requerimiento anterior. Igualando entonces las expresiones (5.27) y (5.30) se llega a que:

$$\frac{dH}{d\theta} = [H, G] + \frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{\partial G}{\partial t} = \frac{dK}{d\theta} , \quad (5.31)$$

equivalentemente, pasando el término $[H, G]$ a la derecha,

$$\frac{dG}{dt} = [G, H] + \frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \theta} , \quad (5.32)$$

resultado que es del todo análogo a (5.30) intercambiando G por H .

Si (5.31) se verifica entonces $K(\xi, t, \theta) = H(\xi, t, \theta)$ y este hecho garantiza que el Hamiltoniano tenga la misma dependencia sobre ξ que $H(\xi^0, t, \theta = 0)$ tiene sobre ξ^0 , si y sólo si $\partial H(\xi, t, \theta)/\partial \theta = 0$, es decir, cuando H no dependa explícitamente de θ y, por tanto, $H = H(\xi, t)$. Si éste es el caso se llega entonces a que las ecuaciones canónicas de movimiento son invariantes a lo largo de la θ -órbita, aspecto que define cuándo una transformación es una simetría tal y como ya se empleó en mecánica Lagrangiana, sección 2.5. Por lo tanto, decimos que una transformación canónica continua es una simetría cuando se verifica

$$\frac{\partial H(\xi, t, \theta)}{\partial \theta} = 0 , \quad (5.33)$$

$$[H, G] = \frac{\partial G}{\partial t} , \quad (5.34)$$

donde la última igualdad se sigue de reescribir (5.31) teniendo en cuenta (5.33). A su vez (5.31) y (5.33) implican que H es invariante en la θ -órbita de una simetría si G no depende de t explícitamente. La ecuación (5.33) implica también que el generador infinitesimal de una simetría es una constante de movimiento teniendo en cuenta (5.32).

En la dinámica Lagrangiana se vio que la invariancia del Lagrangiano bajo transformaciones o rotaciones conduce a la conservación del momento lineal y del momento angular, respectivamente. En la dinámica Hamiltoniana la conservación de un momento generalizado p_i se deduce, en virtud de las ecuaciones canónicas, de la independencia del Hamiltoniano respecto de su coordenada canónicamente conjugada q_i , ya que:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 . \quad (5.35)$$

Podemos ahora establecer dicha relación entre conservación e invariancia (simetría) de H en términos de familias continuas de transformaciones canónicas y sus generadores infinitesimales G .

1. Un momento generalizado p_i es el generador infinitesimal de las traslaciones en q_i . Basta para ello identificar $G = p_i$ y teniendo en cuenta (5.15):

$$\begin{aligned}\frac{dq_j}{d\theta} &= \frac{\partial G}{\partial p_j} = \delta_{ij} , \\ \frac{dp_j}{d\theta} &= -\frac{\partial G}{\partial q_j} = 0 .\end{aligned}\tag{5.36}$$

Luego obtenemos para las θ -órbitas:

$$q_j = q_j^0 + \delta_{ij}\theta , \quad p_j = p_j^0 .\tag{5.37}$$

Es decir, que las θ -órbitas son líneas a lo largo de las cuales sólo q_i varía. En este caso, $\partial G/\partial t = 0$ y para que se cumpla (5.34) se requiere que,

$$[p_i, H] = 0 = -\frac{\partial H}{\partial q_i} ,\tag{5.38}$$

con lo que recuperamos (5.35) con q_i una coordenada cíclica. El resultado (5.38) es suficiente para garantizar también (5.33) dada la elección de variables canónicas que se ha hecho en esta discusión.

2. Consideremos ahora que $G = H$. Su variación temporal viene dada por:

$$\frac{dH}{dt} = [H, H] + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} .\tag{5.39}$$

Por lo tanto, siempre se cumple (5.31) y la evolución temporal es una simetría si y sólo si $\partial H/\partial t = 0$. Entonces, $H(\xi) = H(\xi_0(\xi, t), 0)$ y tenemos el teorema de conservación del Hamiltoniano (equivalente al teorema de conservación de la energía para sistemas cerrados).

5.3. La ecuación de Hamilton-Jacobi

El hecho de que la evolución temporal de un sistema en el espacio de fases sea una sucesión continua de transformaciones canónicas es la base de un nuevo método general para resolver la evolución temporal de un sistema en mecánica.

Se trata de encontrar la función generatriz F de la transformación canónica uniparamétrica temporal en uno de los cuatro tipos básicos de transformaciones canónicas para obtener las ecuaciones algebraicas de la transformación desde el estado inicial al estado final.

Sea ξ^0 el punto inicial en el espacio de fases en t_0 y considérese la transformación canónica $\xi_\alpha(t) = Z_\alpha(\xi^0, t)$. Identificando θ con t y G^0 con $H^0(\xi_0, t) = H(\xi(\xi_0, t), t)$ en (5.8), deducimos que:

$$\frac{\partial F^0}{\partial t} = H^0(\xi^0, t) - \lambda_{\mu\nu} \frac{\partial Z_\mu}{\partial t} Z_\nu .\tag{5.40}$$

Dado que los ξ^0 se refieren a las condiciones iniciales del movimiento, emplearemos el convenio habitual de identificar derivadas temporales parciales y totales siempre que se tomen como argumentos ξ^0 y t . De este modo la ecuación anterior se puede reescribir como:

$$\frac{dF^0}{dt} = H^0(\xi^0, t) - \lambda_{\mu\nu} \frac{dZ_\mu}{dt} Z_\nu = H(\xi, t) - \lambda_{\mu\nu} \dot{\xi}_\mu \xi_\nu . \quad (5.41)$$

ya que los ξ_α^0 se consideran fijos. Por otra parte, vimos en el principio de Hamilton que el movimiento del sistema queda especificado conociendo las coordenadas generalizadas en dos instantes distintos, q^0 en $t = t_0$ y $q(t)$ en t . Así tomaremos:

$$\begin{aligned} \xi_\alpha(t) &= Z_\alpha(\xi^0, t) = \tilde{Z}_\alpha(q^0, q, t) , \\ F^0(\xi^0, t) &= -S(q, t, q^0, t^0) , \end{aligned} \quad (5.42)$$

al ser $S(q, t, q^0, t_0) = -F^0(q^0, p^0(q, q^0, t), t)$ es entonces la función generatriz de la transformación inversa, es decir, de $q(t)$ a q^0 . Aplicando las ecuaciones (4.27) se sigue que,

$$p_i(t) = \frac{\partial S}{\partial q_i(t)} . \quad (5.43)$$

Así mismo, de la igualdad $F = -S$ deducimos,

$$\frac{dF^0}{dt} = -\frac{\partial S}{\partial t} - \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i = -\frac{\partial S}{\partial t} - \sum_i p_i \dot{q}_i . \quad (5.44)$$

Por otra parte, de (5.41) tenemos también,

$$\frac{dF^0}{dt} = H(\xi, t) - \lambda_{\mu\nu} \dot{\xi}_\mu \xi_\nu = H(q, p, t) - \sum_i p_i \dot{q}_i = H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) - \sum_i p_i \dot{q}_i . \quad (5.45)$$

Igualando las dos últimas expresiones se llega a,

$$\boxed{\frac{\partial S}{\partial t} = -H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right)} \quad (5.46)$$

que es la ecuación de Hamilton-Jacobi. Ésta es una ecuación en derivadas parciales, no lineal en general.

Una solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi se obtiene sin más que integrando la ecuación (5.41),

$$S(q, t, q^0, t^0) = \int_{t_0}^t \left[\lambda_{\mu\nu} \dot{\xi}_\mu(q^0, q, t') \xi_\nu(q^0, q, t') - H(\xi(q^0, q, t'), t') \right] dt' , \quad (5.47)$$

claro que para integrar la expresión anterior es necesario conocer de antemano la evolución temporal $\xi(\xi_0, t)$ que es precisamente el problema que pretendemos resolver. Si en (5.47) reemplazamos los p_i por su expresión en términos de q_j y \dot{q}_j (mediante el empleo de las ecuaciones canónicas), se deduce que el integrando es el Lagrangiano, obteniéndose,

$$S(q, t, q^0, t^0) = \int_{t_0}^t L(q(t'), \dot{q}(t'), t) dt' , \quad (5.48)$$

donde $q(t')$ representa el movimiento real del sistema. Por lo tanto, la acción es una solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi. Ilustremos este resultado con el caso simple de una partícula libre.

Ejemplo

Consideremos una partícula libre:

$$q(t') = q^0 + (q - q^0) \frac{t' - t^0}{t - t^0}. \quad (5.49)$$

La acción viene dada por,

$$S = \int_{t_0}^t \frac{1}{2} \dot{q}(t')^2 dt' = \int_{t_0}^t \frac{1}{2} \left(\frac{q - q^0}{t - t^0} \right)^2 dt' = \frac{1}{2} \frac{(q - q^0)^2}{t - t^0}. \quad (5.50)$$

Así a través de la función generatriz:

$$\begin{aligned} p^0 &= -\frac{\partial S}{\partial q^0} = \frac{q - q^0}{t - t^0}, \\ p &= \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{q - q^0}{t - t^0} = p^0. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Resolviendo:

$$\begin{cases} q(t) = q^0 + (t - t^0)p^0, \\ p(t) = p^0. \end{cases} \quad (5.52)$$

Para poder determinar el movimiento del sistema en un caso genérico hemos de resolver la ecuación de Hamilton-Jacobi (5.46). De hecho podemos afirmar:

Teorema

Sea $S(q, Q, t)$ una solución cualquiera de la ecuación de Hamilton-Jacobi que depende de $n + 1$ constantes Q_1, \dots, Q_n y C tal que $\det(\partial^2 S / \partial q \partial Q) \neq 0$. Entonces las ecuaciones:

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial S}{\partial Q_i}, \quad (5.53)$$

donde P_1, \dots, P_n son constantes, definen la transformación canónica desde las $q_i(t), p_i(t)$, que satisfacen las ecuaciones canónicas de movimiento, a las $2n$ constantes de movimiento Q_i, P_i .²

²Debemos aclarar dos puntos:

1. Llamamos una de las constantes C porque si S es solución entonces $S + C$ también es solución (sólo aparecen derivadas parciales de S tanto en la ecuación de Hamilton-Jacobi como en las ecuaciones de la transformación).
2. Se requiere que $\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q \partial Q}\right) \neq 0$ para poder expresar:

$$\left. \begin{aligned} q_i &= q_i(Q, P, t) \\ p_i &= p_i(Q, P, t) \end{aligned} \right\} \text{ y también } \left. \begin{aligned} Q_i &= Q_i(q, p, t) \\ P_i &= P_i(q, p, t) \end{aligned} \right\}.$$

Demostración.-

Dado que los P_i son constantes:

$$\dot{P}_i = 0 = -\frac{d}{dt} \frac{\partial S}{\partial Q_i} = -\sum_j \frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial Q_i} \dot{q}_j - \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial Q_i}. \quad (5.54)$$

Dado que S satisface la ecuación de Hamilton-Jacobi, el segundo sumando de la expresión anterior se puede reexpresar como:

$$\frac{\partial^2 S(q, Q, t)}{\partial Q_i \partial t} = -\frac{\partial H(q, p(q, Q, t), t)}{\partial Q_i} = -\sum_j \frac{\partial H(q, p, t)}{\partial p_j} \frac{\partial^2 S}{\partial Q_i \partial q_j}. \quad (5.55)$$

Sustituyendo (5.55) en (5.54) tenemos:

$$0 = \sum_j \frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial Q_i} \left(-\dot{q}_j + \frac{\partial H(q, p, t)}{\partial p_j} \right), \quad (5.56)$$

y puesto que $\det(\partial^2 S / \partial q \partial Q) \neq 0$, obtenemos el primer conjunto de ecuaciones canónicas:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(q, p, t)}{\partial p_i}. \quad (5.57)$$

Por otra parte,

$$\dot{p}_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial S}{\partial q_i} = \sum_j \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q_i} = \sum_j \frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial q_i} \dot{q}_j - \frac{\partial H(q, Q, t)}{\partial q_i} \quad (5.58)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_j \frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial q_i} \dot{q}_j - \frac{\partial H(q, p, t)}{\partial q_i} - \sum_j \frac{\partial H(q, p, t)}{\partial p_j} \frac{\partial p_j(q, Q, t)}{\partial q_i} \\ &= -\frac{\partial H(q, p, t)}{\partial q_i} + \sum_j \frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial q_i} \left(\dot{q}_j - \frac{\partial H(q, p, t)}{\partial p_j} \right). \end{aligned} \quad (5.59)$$

Teniendo en cuenta (5.57) se deduce el segundo conjunto de ecuaciones canónicas:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H(q, p, t)}{\partial q_i}. \quad (5.60)$$

Por lo tanto, en virtud del teorema anterior, hemos de buscar soluciones de la ecuación de Hamilton-Jacobi, también denominadas soluciones completas, que dependan de n constantes de integración. Se ha de tener en cuenta que la solución de una ecuación diferencial en derivadas parciales dependerá en general no de constantes arbitrarias de integración sino de funciones arbitrarias. Recibe el nombre de *función principal de Hamilton* toda solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi (en nuestro caso S) que dependa de n constantes, y son las únicas soluciones de interés para el estudio del movimiento del sistema.

Las Q_i rara vez serán las q_i^0 (coordenadas generalizadas iniciales). No obstante las $2n$ constantes Q_i , P_i se podrán expresar en función del estado inicial del sistema mediante las relaciones $q_i^0 = q_i(Q, P, t_0)$ y $p_i^0 = p_i(Q, P, t_0)$.

Ejemplo: Busquemos una solución completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi (5.46) para el caso de la partícula libre. El Hamiltoniano, como sabemos, viene dado por:

$$H = \frac{p^2}{2},$$

donde hemos tomado masa unidad. La ecuación de Hamilton-Jacobi es en este caso:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)^2.$$

Esta ecuación se puede resolver aplicando separación de variables. Para ello supongamos una función principal de Hamilton de la forma:

$$S = S_1(Q, t) + S_2(Q, q), \quad (5.61)$$

entonces:

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial S_2}{\partial q} \right)^2. \quad (5.62)$$

Dado que el término de la derecha es independiente de t , se sigue por lo tanto:

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} = -Q, \quad \frac{\partial S_2}{\partial q} = \sqrt{2Q}, \quad (5.63)$$

Lo que nos lleva a:

$$S = -Qt + \sqrt{2Q}q. \quad (5.64)$$

Aplicando las ecuaciones (5.53) obtenemos:

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = \sqrt{2Q}, \quad P = -\frac{\partial S}{\partial Q} = t - \frac{q}{\sqrt{2Q}}. \quad (5.65)$$

De las condiciones iniciales $P = -q^0/\sqrt{2Q}$. De (5.65),

$$q = -\sqrt{2Q}P + \sqrt{2Q}t = pt + q^0, \quad (5.66)$$

$$p = \sqrt{2Q}, \quad (5.67)$$

obviamente Q es la energía cinética E .

5.3.1. Otra forma de llegar a la ecuación de Hamilton-Jacobi

Las nuevas variables canónicas (Q, P) son independientes de tiempo. Este hecho se cumple cuando el nuevo Hamiltoniano sea una función arbitraria de t . Dado que toda función generatriz, al igual que todo Hamiltoniano, está indeterminada por la adición de una función de tiempo genérica, igualaremos a cero dicho Hamiltoniano. Tomando la función generatriz que pasa de las variables (Q, P) a $(q(t), p(t))$ de tipo 3, $S(q, Q, t)$, ésta debe satisfacer:

$$K(Q, P, t) = 0 = \frac{\partial S}{\partial t} + H(q, p(q, Q, t), t), \quad (5.68)$$

equivalentemente,

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right), \quad (5.69)$$

llegando de nuevo a la ecuación de Hamilton-Jacobi (5.46).

5.4. Separación de variables

Recalamos que no usamos el convenio de suma sobre índices latinos repetidos

El único método general para resolver la ecuación de Hamilton-Jacobi es el método de separación de variables. Sólo funciona para algunos Hamiltonianos cuando se expresan en ciertas coordenadas. El caso estándar de aplicación de esta técnica es para Hamiltonianos independientes del tiempo y así los consideraremos a lo largo de esta sección.

Sea la ecuación de Hamilton-Jacobi:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right). \quad (5.70)$$

Dado que el término de la derecha no depende de t , podemos encontrar una solución en la forma:

$$S = W(q, Q) + T(t, Q). \quad (5.71)$$

En efecto, derivando:

$$\underbrace{\frac{\partial T}{\partial t}}_{\text{función de } t} = -\underbrace{H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right)}_{\text{función de } q}. \quad (5.72)$$

Entonces:

$$T(Q, t) = -Q_1 t, \quad S(q, Q, t) = W(q, Q) - Q_1 t, \quad (5.73)$$

donde la función $W(q, Q)$ satisface la ecuación,

$$Q_1 = H\left(q, \frac{\partial W(q, Q)}{\partial q}\right). \quad (5.74)$$

La función $W(q, Q)$ se llama la *función característica de Hamilton*. Esto muestra que un Hamiltoniano independiente del tiempo admite una separación de variables en el tiempo. Del mismo modo se puede demostrar que si $H(q, Q)$ no depende de una variable q_i , digamos q_1 , entonces la ecuación (5.74) admite como solución $W(q, Q) = q_1 Q_1 + W'(q_2, \dots, q_n, Q)$. Este procedimiento se puede iterar para un número arbitrario de variables cíclicas.

Otro método adicional al de la existencia de variables cíclicas es el que describimos a continuación. Multiplicamos H por una función $f(q_1, \dots, q_{n-1})$, y supongamos que de este modo la dependencia en q_n de fH queda en la forma:

$$f(q_1, \dots, q_{n-1})H \left(q, \frac{\partial W}{\partial q} \right) = \overbrace{H'_n \left(q, \frac{\partial W}{\partial q} \right)}^{\text{No depende de } q_n} + H_n \left(q_n, \frac{\partial W}{\partial q_n} \right) = f(q_1, \dots, q_{n-1})Q_1. \quad (5.75)$$

Podemos, por lo tanto, buscar una solución $W(q, Q) = W_n(q_n, Q_n) + W'(q_1, \dots, q_{n-1}, Q)$ y tenemos:

$$H_n \left(q_n, \frac{\partial W_n}{\partial q_n} \right) = Q_n. \quad (5.76)$$

Empleando las ecuaciones (5.75) y (5.76) podemos escribir:

$$H'_n - fQ_1 = -Q_n. \quad (5.77)$$

Esta ecuación es del mismo tipo que la inicial (5.74) pero ahora dependiente de q_1, \dots, q_{n-1} . Realicemos de nuevo el proceso anterior, pero esta vez con $g = g(q_1, \dots, q_{n-2})$. Supongamos que $g(H'_n - fQ_1)$ adopta la forma separable,

$$H'_{n-1} \left(q_1, \dots, q_{n-2}, \frac{\partial W}{\partial q_{1\dots n-2}}, Q \right) + H_{n-1} \left(q_{n-1}, \frac{\partial W}{\partial q_{n-1}}, Q \right) = -gQ_n \quad (5.78)$$

Por lo que obtenemos ahora:

$$\begin{aligned} H_{n-1} \left(q_{n-1}, \frac{\partial W_{n-1}}{\partial q_{n-1}}, Q \right) &= Q_{n-1} \\ W &= W_n(q_n, Q) + W_{n-1}(q_{n-1}, Q) + W'_{n-1}(q_1, \dots, q_{n-2}, Q). \end{aligned} \quad (5.79)$$

Es de destacar que cada separación de una variable q_i conlleva la aparición de una nueva constante Q_i con lo que, si este procedimiento es iterable para las n variables, concluimos que, en efecto, se genera una solución completa de (5.74), o función característica de Hamilton, en la forma:

$$W(q, Q) = \sum_{i=1}^n W_i(q_i, Q). \quad (5.80)$$

En término de la función principal de Hamilton correspondiente a (5.74) se tiene:

$$S(q, Q, t) = \sum_{i=1}^n W_i(q_i, Q) - Q_1 t. \quad (5.81)$$

Las ecuaciones de la transformación para una transformación canónica básica de tipo 3 son:

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} = \frac{\partial W_i(q_i, Q)}{\partial q_i}, \quad (5.82)$$

$$P_i = -\sum_{j=1}^n \frac{\partial W_j}{\partial Q_i} + \delta_{1i}t. \quad (5.83)$$

Sólo a través de (5.83) aparece el tiempo en la evolución. Cuando este procedimiento se puede aplicar diremos que la ecuación de Hamilton-Jacobi es separable.

La ecuación (5.82) da lugar a $p_i = p_i(q_i, Q)$, dependiente sólo de q_i , y la representación de $p_i = p_i(q_i, Q)$ en el plano (q_i, p_i) da lugar al grafo i -ésimo.

Ejemplo

Supongamos que tenemos el Hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2m} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - Fq_3, \quad (5.84)$$

correspondiente al movimiento de una partícula en tres dimensiones con una fuerza constante a lo largo de una de ellas, pensemos por ejemplo en el tiro parabólico. Dicho Hamiltoniano da lugar a una ecuación de Hamilton-Jacobi claramente separable para cada variable q_1 , q_2 y q_3 . Escribimos entonces la función característica de Hamilton como:

$$W(q, Q) = W_1(q_1, Q) + W_2(q_2, Q) + W_3(q_3, Q), \quad (5.85)$$

llegando a la ecuación diferencial,

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial W_1}{\partial q_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial W_2}{\partial q_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial W_3}{\partial q_3} \right)^2 \right] - Fq_3 = Q_1, \quad (5.86)$$

y, por tanto,

$$\left. \begin{array}{l} \left(\frac{\partial W_1}{\partial q_1} \right)^2 = C_1 \\ \left(\frac{\partial W_2}{\partial q_2} \right)^2 = C_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2m} \left[C_1 + C_2 + \left(\frac{dW_3}{dq_3} \right)^2 \right] - Fq_3 = Q_1, \quad (5.87)$$

equivalentemente,

$$\frac{dW_3}{dq_3} = \sqrt{2m(Q_1 + Fq_3) - C_1 - C_2}, \quad (5.88)$$

cuya solución es:

$$W_3(q_3, Q) = \frac{1}{3mF} [2m(Q_1 + Fq_3) - C_1 - C_2]^{3/2}. \quad (5.89)$$

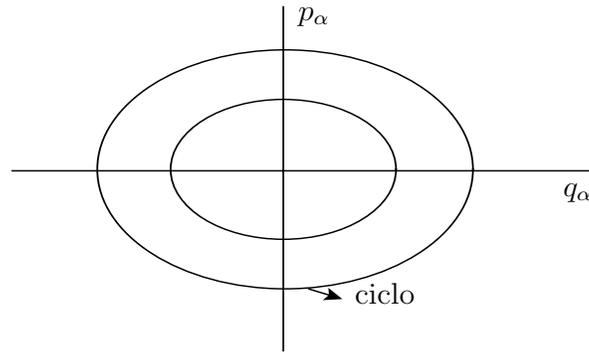


Figura 5.2: Ejemplo de grafo de tipo vibratorio para el caso del oscilador armónico 3(5.94).

Con ello $S = -Q_1 t + \sqrt{C_1} q_1 + \sqrt{C_2} q_2 + W_3(q_3, Q)$. Aplicando (5.83) llegamos a las siguientes ecuaciones de las que podemos resolver el movimiento del sistema,

$$\begin{aligned} -\frac{\partial W_3}{\partial C_1} = P_1 &= -\frac{1}{2\sqrt{C_1}} q_1 + \frac{1}{2mF} \sqrt{2m(Q_1 + Fq_3) - C_1 - C_2}, \\ -\frac{\partial W_3}{\partial C_2} = P_2 &= -\frac{1}{2\sqrt{C_2}} q_2 + \frac{1}{2mF} \sqrt{2m(Q_1 + Fq_3) - C_1 - C_2}, \\ -\frac{\partial W_3}{\partial Q_1} = P_3 &= t - \frac{1}{F} \sqrt{2m(Q_1 + Fq_3) - C_1 - C_2}. \end{aligned} \quad (5.90)$$

De la última ecuación se tiene que $\sqrt{2m(Q_1 + Fq_3) - C_1 - C_2} = F(t - P_3)$. De esta expresión obtenemos directamente $q_3(t)$ y sustituyendo en las dos primeras de las ecuaciones (5.90) se determinan a su vez $q_1(t)$ y $q_2(t)$,

$$\begin{aligned} q_1(t) &= \frac{\sqrt{C_1}}{m} (t - P_3) - 2\sqrt{C_1} P_1, \\ q_2(t) &= \frac{\sqrt{C_2}}{m} (t - P_3) - 2\sqrt{C_2} P_2, \\ q_3(t) &= -\frac{Q_1}{F} + \frac{C_1 + C_2 + F^2(t - P_3)^2}{2mF}. \end{aligned} \quad (5.91)$$

5.4.1. Sistemas acotados y separables

Un sistema en el que el movimiento queda confinado en una cierta región del espacio se dice que es acotado. Un sistema acotado y separable es un sistema acotado en el que la función característica de Hamilton adopta la forma completamente separable (5.80). En lo que sigue de este capítulo supondremos que las q_i fijan unívocamente la configuración del sistema³ y que tratamos con sistemas acotados separables. En este caso, como ya discutimos en la sección anterior,

³Téngase en cuenta que esto no siempre es así. Considérese, por ejemplo, la transformación canónica $q'_i = -p_i$, $p'_i = q_i$.

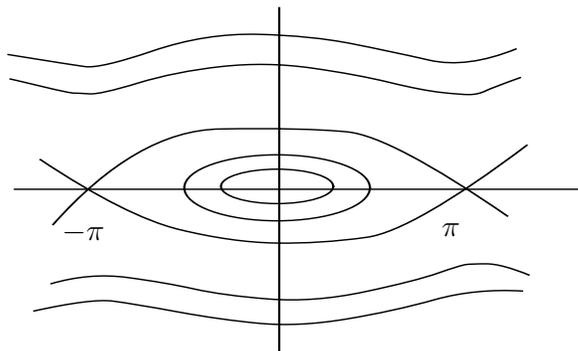


Figura 5.3: Casos para $Q < Mgl$ y $Q > Mgl$.

$$p_i = \frac{\partial W_i(q_i, Q)}{\partial q_i}, \tag{5.92}$$

y cada p_i es función *sólo* de q_i y de n constantes Q_j .

Dado un sistema acotado y separable, siempre se pueden elegir las coordenadas generalizadas de forma que se tengan únicamente dos tipos de grafos relevantes para todo par de variables canónicas (q_j, p_j) .

• **Vibración**

La gráfica de p_i frente a q_i es una curva cerrada. Un ejemplo es el problema del oscilador armónico. En ese caso:

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{dW}{dq_i} \right)^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 q_i^2 = Q_1. \tag{5.93}$$

De donde se obtiene:

$$p_i = \pm \sqrt{2mQ_1 - m^2 \omega^2 q_i^2}. \tag{5.94}$$

El \pm hace que la curva sea simétrica respecto del eje q_i . Los puntos donde el radicando se hace cero son los puntos de retroceso y son puntos de ramificación de la raíz cuadrada. Éste es el caso habitual para un Hamiltoniano cuadrático en p_i . El tiempo necesario para recorrer todo el ciclo en general no es fijo ya que dependerá del resto de coordenadas involucradas en el movimiento y, por lo tanto, el movimiento típicamente no será periódico.

• **Rotación**

En este caso q_i y $q_i + m q_i^0$ reproducen la misma configuración del sistema para m un entero. Entonces p_i es una función periódica de q_i , el caso típico corresponde a que q_i sea un ángulo. Al igual que en el caso de vibración, el tiempo necesario para pasar de q_i a $q_i + q_i^0$ no es en general independiente del resto de q_j y, por lo tanto, el movimiento en q_i no tiene, en general, un período bien definido. La coordenada q_i se dice que es multivaluada porque cada configuración

no corresponde a un único valor de q_i sino que éste está indeterminado en múltiplos enteros de q_i^0 .

Dependiendo de los valores de las constantes Q_1, \dots, Q_n , el carácter oscilatorio o vibratorio de una variable dada q_i puede cambiar pasando de univaluada a multivaluada. Por ejemplo, consideremos el movimiento de un péndulo simple,

$$H = \frac{p^2}{2Ml^2} - Mgl \cos \theta = Q, \quad (5.95)$$

De la expresión anterior,

$$\frac{p^2}{2Ml^2} = Mgl \cos \theta + Q \geq 0, \quad (5.96)$$

y distinguiremos dos casos: i) $Q - Mgl < 0$ y ii) $Q - Mgl > 0$.

i) Si $Q - Mgl \leq 0$ el movimiento está restringido ya que existirá un θ_0 tal que,

$$\frac{p^2}{2Ml^2} = 0 = Q + Mgl \cos \theta_0. \quad (5.97)$$

Entonces la función $p(\theta, Q)$ es del tipo vibratorio.

ii) Por el contrario, si $Q - Mgl > 0$ no existe tal θ_0 , sino que el péndulo da vueltas continuamente sin ningún punto de retroceso al disponer de suficiente energía cinética y el movimiento se torna multivaluado. Así, cualquier valor de θ describirá la misma configuración que $\theta + 2\pi m$ con $m \in \mathbb{Z}$.

5.5. Variables acción ángulo

Consideremos un sistema acotado y separable. Vamos a realizar una transformación canónica a un conjunto de variables canónicas de claro significado geométrico y muy indicadas para este tipo de sistemas. Son las llamadas *variables acción-ángulo*.⁴

Las *variables acción* las denotaremos por J_i y se definen como:

$$J_i = \oint p_i dq_i = \oint \frac{\partial W_i(q_i, Q)}{\partial q_i} dq_i. \quad (5.98)$$

La integral curvilínea se realiza sobre un ciclo completo en el espacio (q_i, p_i) y representa o bien el área en el espacio de fases dentro de la órbita cerrada, si q_i es univaluada, o el área correspondiente a un ciclo de la órbita, si q_i es multivaluada. Téngase en cuenta que en la definición anterior sólo varía q_i y el resto de coordenadas q_j se mantienen constantes.

En virtud de la definición, dado que se integra sobre todo estado posible de movimiento en el espacio (q_i, p_i) , resulta que $J_i = J_i(Q)$ y son constantes de movimiento. Además, la relación anterior es invertible, dejándose su demostración como un ejercicio. Dado que $p_i \dot{q}_i$ tiene dimensiones de energía, resulta, por tanto, que J_i tiene dimensiones de energía por tiempo y de ahí su nombre. Como consecuencia, la variable canónicamente conjugada a cada J_i no tendrá dimensiones.

⁴Como ya se ha indicado, en esta sección tampoco se emplea el convenio de suma sobre índices repetidos.

Reexpresemos a continuación la función característica de Hamilton, $W = \sum_i W_i(q_i, Q)$, en términos de las variables J_i :

$$W_i = W_i(q_i, Q(J)) = \widehat{W}_i(q_i, J) , \quad (5.99)$$

expresando las constantes $Q_i = Q_i(J)$. Indicamos por $\widehat{W} = \sum_{i=1}^n \widehat{W}_i$ a la función característica de Hamilton con argumentos dados por q_i y J_i . Las ecuaciones de la transformación son en esta notación:

$$p_i = \frac{\partial W_i(q_i, Q)}{\partial q_i} = \frac{\partial \widehat{W}_i(q_i, J)}{\partial q_i} . \quad (5.100)$$

En lugar de seguir considerando la función característica de Hamilton como parte de la función generatriz S , la tomamos a continuación como una función generatriz independiente de tiempo. Esta transformación canónica produce el cambio de variables canónicas $(q(t), p(t)) \rightarrow (J, w)$, con w_i las variables canónicamente conjugadas a los J_i y que denominamos por variables *ángulo*, dado que son adimensionales. Dada las dimensiones de J_i , aunque son funciones de las Q_j , las consideraremos momentos generalizados. Tendremos así una transformación canónica básica de tipo 2. Las variables ángulo son:

$$w_i = \frac{\partial \widehat{W}(q, J)}{\partial J_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \widehat{W}_j(q_j, J)}{\partial J_i} . \quad (5.101)$$

Además, dado que el Jacobiano asociado al cambio de variables $J_i(Q)$ es no nulo, como se ha mencionado anteriormente, y a que el Hessiano de W respecto de q_i y Q_i es también distinto de cero, tendremos:

$$\det \left(\frac{\partial^2 \widehat{W}}{\partial J_i \partial q_j} \right) \neq 0 , \quad (5.102)$$

como se requiere para que tengamos una transformación canónica básica de tipo 2. Dado que $\partial \widehat{W} / \partial t = 0$, el nuevo Hamiltoniano viene dado por:

$$K(w, J) = H = Q_1(J) . \quad (5.103)$$

Con ello, las ecuaciones canónicas para las nuevas variables son:

$$\begin{aligned} \dot{J}_i &= -\frac{\partial Q_1(J)}{\partial w_i} = 0 , \\ \dot{w}_i &= \frac{\partial Q_1(J)}{\partial J_i} \equiv \nu_i(J) . \end{aligned} \quad (5.104)$$

Las ecuaciones anteriores son triviales de integrar,

$$J_i = cte. , \quad (5.105)$$

$$w_i = \nu_i(J)t + \phi_i . \quad (5.106)$$

De (5.101) se despeja $q_i = q_i(w, J)$, que al sustituir en (5.100) permite obtener $p_i = p_i(w, J)$.⁵

Estudieemos a continuación la variación de w_i bajo el cambio de una coordenada arbitraria q_j manteniendo el resto de coordenadas generalizadas constantes. Veamos que w_i es periódica bajo un cambio de dichas características en q_j para $j \neq i$, y que aumenta monótonamente con q_j , cambiando en una unidad en cada ciclo completo de q_i . Para ello designemos por $\Delta_j w_i$ el cambio en w_i debido a la variación de q_j una vez recorrido un ciclo completo manteniendo el resto de coordenadas fijas, tenemos:

$$\begin{aligned} \Delta_j w_i &= \oint \frac{\partial w_i}{\partial q_j} dq_j = \oint \frac{\partial^2 \widehat{W}}{\partial q_j \partial J_i} dq_j \\ &= \frac{\partial}{\partial J_i} \oint \frac{\partial \widehat{W}_j}{\partial q_j} dq_j = \frac{\partial J_j}{\partial J_i} = \delta_{ij} . \end{aligned} \quad (5.107)$$

Nota

El cálculo anterior no muestra que w_i cambia en una unidad en un ciclo durante el movimiento real del sistema. Durante dicho movimiento todas las q_j están cambiando, mientras que en el cálculo anterior se ha tomado que q_j , con $j \neq i$, está fijada, y q_i recorre su ciclo respectivo en el plano (q_i, p_i) . De hecho, a partir de (5.101) vemos que cada coordenada contribuye aditivamente, y de forma independiente al resto de coordenadas, a la variación de w_i en un tiempo dado.

De las ecuaciones,

$$p_i = \frac{\partial \widehat{W}_i(q, J)}{\partial q_i} , \quad w_i = \frac{\partial \widehat{W}(q, J)}{\partial J_i} , \quad (5.108)$$

al resolver $q_i(w, J)$ de las últimas ecuaciones, resulta de (5.107) que al cambiar w_j , y sólo w_j , en una unidad entonces q_j para el caso univaluado tampoco cambia mientras que para el caso multivaluado cambia en q_j^0 . Para el resto de coordenadas podemos llegar a la conclusión de que no cambian en el proceso ya que si alguna lo hiciese, ésta sería del tipo multivaluado y lo harían en q_i^0 con $i \neq j$. Sin embargo, entonces ocurriría que también w_i cambiaría en una unidad, según (5.107), en contra de lo supuesto. Así que por tanto las coordenadas para $i \neq j$ son periódicas y vuelven a su valor inicial, mientras que :

$$\begin{aligned} q_i(w_1, \dots, w_{i-1}, w_i + m, w_{i+1}, \dots, w_n, J, t) &= q_i(w, J, t) , \text{ caso univaluado} , \\ q_i(w_1, \dots, w_{i-1}, w_i + m, w_{i+1}, \dots, w_n, J, t) &= q_i(w, J, t) + m_i q_i^0 , \text{ caso multivaluado} . \end{aligned} \quad (5.109)$$

Si para el caso multivaluado definimos $q'_i = q_i - q_i^0 w_i$, de la última de las ecuaciones anteriores se tiene que:

$$\begin{aligned} q'_i(w_1, \dots, w_{i-1}, w_i + m, w_{i+1}, \dots, w_n, J, t) &= q_i(w_1, \dots, w_{i-1}, w_i + m, w_{i+1}, \dots, w_n, J, t) - q_i^0 (w_i + m_i) \\ &= q_i(w, J, t) - q_i^0 w_i + m_i q_i^0 - m_i q_i^0 = q'_i(w_i, J, t) , \end{aligned} \quad (5.110)$$

⁵Este procedimiento es aplicable dado que el Hessiano $|\partial^2 W / \partial q \partial Q| \neq 0$ de donde se sigue que $|\partial \widehat{W} / \partial q \partial J| \neq 0$ puesto que el jacobiano $|\partial Q / \partial J| \neq 0$.

como en el caso univaluado. Así pues si consideramos simultáneamente el cambio:

$$\left. \begin{array}{l} w_1 \rightarrow w_1 + m_1 \\ w_2 \rightarrow w_2 + m_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_n \rightarrow w_n + m_n \end{array} \right\} \Rightarrow \forall i \left\{ \begin{array}{l} q_i(w + m, J) = q_i(w, J) \text{ univaluada,} \\ q'_i(w + m, J) = q'_i(w, J) \text{ multivaluada.} \end{array} \right. \quad (5.111)$$

Dado el carácter periódico de las q_i (q'_i) como funciones de w_j es conveniente expresar aquéllas mediante serie de Fourier:

$$\begin{aligned} q_i &= \sum_{m_1, m_2, \dots, m_n = -\infty}^{\infty} A_{m_1, \dots, m_n}^{(i)} e^{2\pi i [m_1 w_1 + \dots + m_n w_n]} , \\ q'_i &= \sum_{m_1, m_2, \dots, m_n = -\infty}^{\infty} \tilde{A}_{m_1, \dots, m_n}^{(i)} e^{2\pi i [m_1 w_1 + \dots + m_n w_n]} . \end{aligned} \quad (5.112)$$

Tanto para el caso de vibración como para el oscilatorio es evidente de (5.112) que las variables w_i son variables multivaluadas para todo $i = 1, \dots, n$.

El desarrollo del método de variables acción-ángulo fue ideado por el astrónomo francés Delaunay (1816-1872) y tiene la ventaja de ofrecer un cálculo directo de las constantes de integración J_i en términos de cantidades con un claro significado geométrico, y en términos de ellas las “frecuencias” ν_i , según (5.104).

El movimiento del sistema será periódico si existe un intervalo de tiempo T tal que:

$$q_i(t + T) = q_i(t) , \quad (5.113)$$

o con las q'_i si las variables son multivaluadas, para todo $i = 1, \dots, n$. Todos los q_i (q'_i) retornan a su valor inicial (recorriendo un ciclo) así que de (5.101) y (5.107) todos los w_i avanzan en un entero:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta_T w_i = \nu_i T = k_i \\ \Delta_T w_j = \nu_j T = k_j \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\nu_i}{k_i} = \frac{\nu_j}{k_j} = \frac{1}{T} , \quad (5.114)$$

con k_i y k_j dos números naturales, siendo $i, j = 1, \dots, n$. Así que todos los $\nu_i(J)$ han de ser conmensurables para tener un movimiento periódico (el sistema se llama entonces completamente degenerado). Esta condición es equivalente a afirmar que $\exists k_1, \dots, k_n$ enteros tal que $\sum_{i=1}^n \nu_i k_i = 0$.

La dependencia temporal de q_i (q'_i) se halla sustituyendo (5.106) en (5.112),

$$\begin{aligned} q_i(t) &= \sum A_{m_1, \dots, m_n}^{(i)} e^{2\pi i (m_1 \nu_1 + \dots + m_n \nu_n) t} e^{2\pi i (\phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_n)} \\ &= \sum B_{m_1, \dots, m_n}^{(i)} e^{2\pi i (m_1 \nu_1 + \dots + m_n \nu_n) t} , \end{aligned} \quad (5.115)$$

y análogamente para $q'_i(t)$. De la expresión anterior también se deduce de forma directa la condición de periodicidad (5.114), dado que cada uno de los productos $\nu_i T$ se debe hacer un múltiplo de 2π simultáneamente para volver a la configuración inicial. Si esto es así se tiene, por tanto, que $\nu_i T = m_i$, $\nu_j T = m_j$, con m_i, m_j dos números enteros e i, j un par cualquiera de índices. De la igualdad anterior se sigue que $\nu_i / \nu_j = m_j / m_i$ y recuperamos el resultado (5.114).

5.6. Problema de fuerzas centrales

5.6.1. Método de Hamilton-Jacobi para el problema de fuerzas centrales

Dado que el momento angular se conserva, el movimiento está restringido a un plano. Consideramos por ello coordenadas polares. El Lagrangiano en estas coordenadas es:

$$L = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \right) - V(r) . \quad (5.116)$$

Ya que:

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} , \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} , \quad (5.117)$$

el Hamiltoniano es:

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) + V(r) . \quad (5.118)$$

Dado que el Hamiltoniano no depende de tiempo, la función principal de Hamilton puede tomarse en la forma:

$$S(q, Q, t) = W(q, Q, t) - Q_1 t = W_r(r, Q) + W_\theta(\theta, Q) - tQ_1 , \quad (5.119)$$

donde ya se ha tenido en cuenta la estructura del Hamiltoniano anterior para encontrar una solución separable. Nótese que la variable θ es cíclica con lo que podemos tomar,

$$W_\theta = Q_2 \theta , \quad (5.120)$$

tal y como se discutió en la sección 5.4. Queda por tanto la siguiente ecuación para $W_r(r, Q)$,

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial W_r}{\partial r} \right)^2 + \frac{Q_2^2}{r^2} \right] + V(r) = Q_1 , \quad (5.121)$$

donde $Q_2^2/2mr^2$ es el bien conocido potencial centrífugo. Entonces,

$$W_r = \sqrt{2m} \int \sqrt{Q_1 - V_r - \frac{Q_2^2}{2mr^2}} dr . \quad (5.122)$$

La evolución temporal se obtiene teniendo en cuenta las ecuaciones (5.122), (5.120) y (5.119),

$$P_1 = -\frac{\partial S}{\partial Q_1} = t - \frac{\partial W_r}{\partial Q_1} , \quad (5.123)$$

de forma más explícita,

$$t - P_1 = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dr}{\sqrt{Q_1 - V(r) - \frac{Q_2^2}{2mr^2}}} , \quad (5.124)$$

de donde despejando se obtiene $r(t)$. Por otra parte, también se tiene,

$$P_2 = -\frac{\partial S}{\partial Q_2} = -\theta + \sqrt{\frac{1}{2m}} \int \frac{dr Q_2/r^2}{\sqrt{Q_1 - V(r) - \frac{Q_2^2}{2mr^2}}} \Rightarrow \quad (5.125)$$

$$P_2 + \theta = \frac{Q_2}{\sqrt{2m}} \int \frac{dr/r^2}{\sqrt{Q_1 - V(r) - \frac{Q_2^2}{2mr^2}}}, \quad (5.126)$$

de donde se obtiene $\theta = \theta(r)$, y sustituyendo entonces $r = r(t)$, se determina $\theta(t)$. También está claro el significado físico de las constantes Q_1 , Q_2 surgidas del proceso de separación de variables: $Q_1 = E$ y Q_2 es el momento angular.

5.6.2. Variables acción ángulo en el problema de fuerzas centrales

Considérese el movimiento de un sistema ligado en un campo de fuerzas centrales. Según hemos visto:

$$p_\theta = \frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} = Q_2, \quad p_r = \frac{W_r}{\partial r} = \sqrt{2m} \sqrt{Q_1 - V(r) - \frac{Q_2^2}{2mr^2}}. \quad (5.127)$$

Las variables acción vienen dadas por:

$$\begin{aligned} J_\theta &= \int_0^{2\pi} p_\theta d\theta = 2\pi Q_2 \Rightarrow Q_2 = \frac{J_\theta}{2\pi}, \\ J_r &= \oint dr \sqrt{2m} \sqrt{Q_1 - V(r) - \frac{Q_2^2}{2mr^2}} \\ &= 2\sqrt{2m} \int_{r_1}^{r_2} dr \sqrt{Q_1 - V(r) - \frac{J_\theta^2}{8\pi^2 m r^2}}, \end{aligned} \quad (5.128)$$

donde r_1 y r_2 son los puntos de retroceso determinados por la solución de la ecuación,

$$Q_1 - V(r) - \frac{Q_2^2}{2mr^2} = 0. \quad (5.129)$$

Consideraremos el siguiente potencial:

$$V(r) = -\frac{k}{r} + \frac{\beta}{r^2}, \quad (5.130)$$

que es el problema de Kepler con una perturbación proporcional a β e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. Entonces de (5.128) y recordando que $E = Q_1 < 0$:

$$J_r = -\sqrt{J_\theta^2 + 8\pi^2 m \beta} + \pi k \sqrt{\frac{-2m}{Q_1}}. \quad (5.131)$$

Despejando la energía:

$$Q_1(J) = \frac{-2m\pi^2 k^2}{\left(J_r + \sqrt{J_\theta^2 + \alpha}\right)^2}, \quad (5.132)$$

con $\alpha = 8\pi^2 m\beta$. Calculando ν_θ y ν_r en virtud de (5.104) tenemos:

$$\begin{aligned} \nu_r &= \frac{\partial Q_1}{\partial J_r} = \frac{4m\pi^2 k^2}{\left(J_r + \sqrt{J_\theta^2 + \alpha}\right)^3} = \sqrt{\frac{2}{m}} \frac{(-Q_1)^{3/2}}{\pi k}, \\ \nu_\theta &= \frac{\partial Q_1}{\partial J_\theta} = \nu_r \frac{J_\theta}{\sqrt{J_\theta^2 + \alpha}}. \end{aligned} \quad (5.133)$$

Para una energía dada, la expresión para ν_r es la misma que en el problema de Kepler puro ($\beta = 0$). No así la de ν_θ , para la que hay una dependencia explícita en α . Si $\alpha = 0 \Rightarrow \nu_\theta = \nu_r$ y el movimiento es degenerado. Con $\alpha \neq 0$ el movimiento no será degenerado en general.

Veamos las variables ángulo y con ellas la dependencia temporal de las coordenadas r y θ . Para ello, reexpresamos la función característica de Hamilton en términos de r , θ , J_r y J_θ . Resulta entonces,

$$\begin{aligned} \widehat{W}_\theta &= \frac{J_\theta}{2\pi} \theta, \\ \widehat{W}_r &= \sqrt{2m} \int \left[\frac{-2m\pi^2 k^2}{\left(J_r + \sqrt{J_\theta^2 + \alpha}\right)^2} + \frac{k}{r} - \frac{\beta}{r^2} - \frac{J_\theta^2}{8\pi^2 m r^2} \right]^{1/2} dr, \\ w_\theta &= \frac{\partial \widehat{W}_\theta}{\partial J_\theta} + \frac{\partial \widehat{W}_r}{\partial J_\theta} = \frac{\theta}{2\pi} + \frac{\partial \widehat{W}_r}{\partial J_\theta}, \\ w_r &= \frac{\partial \widehat{W}_\theta}{\partial J_r} + \frac{\partial \widehat{W}_r}{\partial J_r} = \frac{\partial \widehat{W}_r}{\partial J_r}. \end{aligned} \quad (5.134)$$

Realizando explícitamente las derivadas anteriores,

$$w_r = \nu_r t + \phi_r = \sqrt{\frac{m}{2}} \nu_r \int \left[Q_1 + \frac{k}{r} - \frac{Q_2^2 + 2m\beta}{2mr^2} \right]^{-1/2} dr. \quad (5.135)$$

De aquí se obtiene $r = r(t)$ sin interferencia del movimiento en θ . Así, cuando w_r cambie en una unidad, entonces $r(t)$ ha recorrido un ciclo con lo que $1/\nu_r$ es el período del movimiento en r , independientemente de la perturbación β/r^2 , sólo depende de $Q_1 = E$, de m y de k , ver la ecuación (5.133).

Para w_θ :

$$\begin{aligned} w_\theta &= \nu_\theta t + \phi_\theta = \frac{\theta}{2\pi} + \frac{\partial}{\partial J_\theta} \int \frac{\partial W_r}{\partial r} dr, \\ &= \frac{\theta}{2\pi} + \sqrt{\frac{m}{2}} \int \left[Q_1 + \frac{k}{r} - \frac{Q_2^2 + 2m\beta}{2mr^2} \right]^{-1/2} \left[\nu_\theta - \frac{Q_2}{2\pi m r^2} \right] dr. \end{aligned} \quad (5.136)$$

Aquí se tiene un ejemplo donde el movimiento de dos grados de libertad, de θ y de r , se acoplan. Así w_θ depende tanto de r como de θ . En un movimiento real tanto r como θ se mueven simultáneamente con lo que aunque θ cambie en un ciclo en 2π , w_θ no cambiará en un entero generalmente.

Dado que ν_r y ν_θ son no conmensurables para valores arbitrarios de J_θ y α , ver (5.133), ello implica que cuando r haya recorrido un ciclo completo la variación de θ no será exactamente igual a 2π . De hecho, para $\alpha < 0$ vemos de (5.133) que la variación en θ será mayor que 2π dado que $\nu_\theta > \nu_r$ cuando r recorra un ciclo completo. Podemos determinar la variación en θ tras un ciclo en r a partir de la expresión para w_θ , (5.136), de forma sencilla. De hecho, dado que W_r es independiente de θ al completar un ciclo en r en un período de tiempo igual a $1/\nu_r$ tenemos a partir de (5.136) que:

$$\Delta w_\theta = \frac{\nu_\theta}{\nu_r} = \frac{\Delta\theta}{2\pi} + \frac{\partial J_r}{\partial J_\theta} = \frac{\Delta\theta}{2\pi}. \quad (5.137)$$

Por lo tanto,

$$\Delta\theta = 2\pi \frac{\nu_\theta}{\nu_r} = 2\pi \frac{J_\theta}{\sqrt{J_\theta^2 + \alpha}}, \quad (5.138)$$

donde hemos empleado (5.133). Como era de esperar, para $\alpha < 0$ $\Delta\theta \geq 2\pi$. Sólo tendremos $\Delta\theta = 2\pi n$ si $m\nu_\theta/\nu_r = \pm n$ con $m, n \in \mathbb{Z}$. Pero en general ν_θ/ν_r será irracional, y el movimiento no es periódico de tal modo que la curva no se cerrará.

Este efecto se denomina precesión del perihelio y ocasiona que el punto de retroceso radial se mueva con el tiempo dado que no vuelve a su misma posición del ciclo anterior sino rotado un ángulo de $\Delta\theta - 2\pi = 2\pi(J_\theta/\sqrt{J_\theta^2 + \alpha} - 1)$ en un tiempo $1/\nu_r$. Se llega por tanto al concepto de velocidad de precesión del perihelio igual a

$$\dot{\phi} = 2\pi\nu_r(J_\theta/\sqrt{J_\theta^2 + \alpha} - 1). \quad (5.139)$$

Supongamos que $\alpha/J_\theta^2 \ll 1$ pero no cero. La órbita estará muy próxima a la del problema de Kepler puro y podemos hacer un desarrollo en potencias de α . Así,

$$\dot{\phi} = -\nu_r \frac{\pi\alpha}{J_\theta^2} + \mathcal{O}(\alpha^2). \quad (5.140)$$

Relacionando $J_\theta/2\pi$ con la excentricidad de la elipse e ,⁶ tenemos:

$$\dot{\phi} = -\frac{\alpha\nu_r(1-e^2)^{-1}}{4\pi m a k}, \quad (5.141)$$

siendo a es el semieje mayor. Si realizamos las sustituciones adecuadas, obtenemos que para el planeta Mercurio, la precesión del perihelio es de 42 segundos de arco por siglo. Este es justamente el valor que exitosamente predice la teoría de la Relatividad General de Einstein de acuerdo con el resultado experimental.

⁶Véase por ejemplo la referencia [6].

Capítulo 6

Teoría de Perturbaciones Canónica

6.1. Introducción

Se trata de obtener soluciones aproximadas a partir de soluciones de problemas resolubles exactamente correspondientes a Hamiltonianos no perturbados cuyas soluciones son conocidas. Este procedimiento se puede aplicar a Hamiltonianos que se pueden considerar próximos a los no perturbados, tal que la diferencia entre el Hamiltoniano perturbado y el no perturbado se puede considerar pequeña de modo que la perturbación es proporcional a un parámetro pequeño adimensional $\lambda \ll 1$. La solución aproximada se da entonces como una serie en potencias de dicho parámetro.

En el desarrollo de la teoría de perturbaciones ha jugado un papel esencial el desarrollo de la mecánica celeste y el estudio y predicción de órbitas de forma muy precisa para vehículos espaciales ayudado por el incremento en la capacidad de cálculo con las modernas computadoras. Motivados por la notación de mecánica cuántica, hablamos de teoría de perturbaciones dependiente e independiente del tiempo, aun cuando ésta última no será vista en este curso por falta de tiempo. También se discutirá la que designamos por teoría de perturbaciones directa que no hace uso del formalismo de transformaciones canónicas.

6.2. Teoría de perturbaciones dependiente del tiempo

El Hamiltoniano del problema sin perturbar es $H_0(q, p, t)$ y mediante la teoría de Hamilton-Jacobi encontramos la función generatriz $S(q, Q, t)$ (como siempre las Q_i son las nuevas coordenadas) que genera la transformación canónica desde las variables canónicas (q, p) a las variables (Q, P) , tal que el Hamiltoniano resultante es idénticamente nulo, con lo que Q y P son constantes. En lo que sigue se supondrá que $S(q, Q, t)$ es conocida.

La transformación canónica $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ obtenida mediante Hamilton-Jacobi para el caso sin perturbar, lo es independientemente del Hamiltoniano. En particular, seguirá siendo canónica para el Hamiltoniano perturbado:

$$H(q, p, t) = H_0(q, p, t) + \Delta H(q, p, t) . \quad (6.1)$$

En las variables (Q, P) el Hamiltoniano correspondiente viene dado por:

$$K(Q, P, t) = H_0(q(Q, P, t), p(Q, P, t), t) + \Delta H(q(Q, P, t), p(Q, P, t), t) + \left. \frac{\partial S(q, Q, t)}{\partial t} \right|_{(Q, P, t)}. \quad (6.2)$$

Dado que S es una función principal de Hamilton para el problema sin perturbar se tiene que:

$$H_0 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \quad (6.3)$$

y por lo tanto,

$$K(Q, P, t) = \Delta H(q(Q, P, t), p(Q, P, t), t). \quad (6.4)$$

Las ecuaciones de movimiento para Q y P son:

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K(Q, P, t)}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial K(Q, P, t)}{\partial Q_i}. \quad (6.5)$$

Si $\Delta H = 0$ tenemos que $\dot{Q}_i = \dot{P}_i = 0$. Pero ante la presencia de la perturbación en general no es así y Q_i y P_i dejan de ser constantes y pasan a depender del tiempo.

Las ecuaciones (6.5) son rigurosas, no hay aproximación. No obstante su solución es, por lo general, de no menor dificultad que el problema original. La ventaja es que pueden ser aplicadas de forma directa para un tratamiento perturbativo de las mismas. En el tratamiento perturbativo de dichas ecuaciones se procede por iteración. Así escribimos la solución de (6.5) en la forma:

$$\begin{aligned} Q_i &= Q_i^{(0)} + Q_i^{(1)} + \dots + Q_i^{(n)} + \dots, \\ P_i &= P_i^{(0)} + P_i^{(1)} + \dots + P_i^{(n)} + \dots, \end{aligned} \quad (6.6)$$

donde la contribución n -ésima se obtiene tras iterar n veces (6.5). Concretamente, la primera iteración corresponde a:

$$\dot{Q}_i^{(1)} = \left. \frac{\partial K(Q, P, t)}{\partial P_i} \right|_{(Q^{(0)}, P^{(0)})}, \quad \dot{P}_i^{(1)} = -\left. \frac{\partial K(Q, P, t)}{\partial Q_i} \right|_{(Q^{(0)}, P^{(0)})}, \quad (6.7)$$

donde $Q^{(0)}$ y $P^{(0)}$ son las soluciones no perturbadas. Estas constantes se determinan a partir de las condiciones iniciales tal que $q_i(Q, P, t_0) = q_i(Q^{(0)}, P^{(0)}, t_0) = q_i(t_0)$ y $p_i(Q, P, t_0) = p_i(Q^{(0)}, P^{(0)}, t_0) = p_i(t_0)$. Esto implica que el resto de términos en (6.6) para $t = t_0$ satisfacen la condición inicial:

$$Q_i^{(m)}(t_0) = P_i^{(m)}(t_0) = 0, \quad \text{para todo } m > 0. \quad (6.8)$$

Dado que el lado derecho de (6.7) es una función de tiempo conocida, su solución es:

$$\begin{aligned} Q_i^{(1)}(t) &= \int_{t_0}^t \left. \frac{\partial K(Q, P, t')}{\partial P_i} \right|_{(Q^{(0)}, P^{(0)})} dt', \\ P_i^{(1)}(t) &= -\int_{t_0}^t \left. \frac{\partial K(Q, P, t')}{\partial Q_i} \right|_{(Q^{(0)}, P^{(0)})} dt'. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Notación

Para simplificar la notación en lo que sigue designaremos por:

$$\xi = (Q, P), \quad \xi^{(0)} = (Q^{(0)}, P^{(0)}), \quad \xi^{(1)} = (Q^{(1)}, P^{(1)}), \dots, \xi^{(n)} = (Q^{(n)}, P^{(n)}).$$

A modo de ilustración determinemos también $Q_i^{(2)}$ y $P_i^{(2)}$. A partir de (6.5) tenemos:

$$\dot{\xi}^{(1)} + \dot{\xi}^{(2)} = \Gamma \frac{\partial K}{\partial \xi} \Big|_{\xi^{(0)} + \xi^{(1)}}, \quad (6.10)$$

sustituyendo en la expresión anterior a $\dot{\xi}^{(1)}$ dado en (6.7) se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}^{(2)} &= \Gamma \frac{\partial K}{\partial \xi} \Big|_{\xi^{(0)} + \xi^{(1)}} - \Gamma \frac{\partial K}{\partial \xi} \Big|_{\xi^{(0)}}, \\ \xi^{(2)}(t_0) &= 0, \end{aligned} \quad (6.11)$$

donde la última ecuación se obtiene de (6.8) donde han quedado fijadas las condiciones iniciales de todas las correcciones.

El proceso de iteración presentado para $N = 0, 1$ y 2 se generaliza trivialmente para la n -ésima iteración, de forma que se tiene,

$$\begin{aligned} \dot{\xi}^{(n)} &= \Gamma \frac{\partial K}{\partial \xi} \Big|_{\xi^{(0)} + \xi^{(1)} + \dots + \xi^{(n-1)}} - \Gamma \frac{\partial K}{\partial \xi} \Big|_{\xi^{(0)} + \xi^{(1)} + \dots + \xi^{(n-2)}}, \\ \xi^{(n)}(t_0) &= 0. \end{aligned} \quad (6.12)$$

De este modo se puede determinar sistemáticamente los órdenes superiores e incrementar correspondientemente la precisión del cálculo. De hecho, cada término $\xi^{(n)}$ calculado es proporcional a λ^n como muestra claramente (6.12). Para ello, téngase en cuenta que el primer sumando del término de la derecha incluye contribuciones de hasta orden λ^n inclusive, dado que $K \propto \lambda$, mientras que al sustraerle el siguiente sumando se eliminan todas las contribuciones de orden λ^m , con $m = 1, \dots, n-1$.

Interpretación:

Las variables (Q, P) dependen del tiempo tal y como se ha indicado. Sin embargo, dado que la transformación canónica $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ se ha determinado resolviendo la ecuación de Hamilton-Jacobi para el problema no perturbado, las variables (Q, P) , para un tiempo dado t , determinan la configuración y movimiento (velocidades) instantáneo del sistema de la misma forma que en el caso no perturbado. Por ejemplo, si pensamos en una órbita elíptica planetaria, las constantes (Q, P) están relacionadas con las características de dicha elíptica e instantáneamente el estado del sistema viene dado de la misma forma que en el caso no perturbado, sólo que ahora parámetros que en el caso no perturbado eran constantes (excentricidad de la elipse, semieje mayor, etc.) ahora *pasan a depender de t* . La órbita no perturbada a lo largo de la cual el sistema se mueve instantáneamente se denomina

“órbita instantánea” (*osculating orbit*). Su posición y tangente instantáneas coinciden con aquellas de la auténtica órbita. Por otra parte, dado que la perturbación se supone pequeña, la variación temporal de los parámetros que fijan la órbita instantánea debe ser lenta en comparación con el movimiento orbital no perturbado, con lo que sigue siendo útil considerar el mismo movimiento que en el caso no perturbado que cambia lentamente.

6.2.1. Dependencia temporal de las “constantes” de la órbita

Sean $c_\alpha = c_\alpha(Q, P)$ un conjunto de $2n$ variables independientes, típicamente seleccionadas de forma que sean especialmente indicadas para describir la órbita instantánea. Su evolución temporal viene dada por:

$$\dot{c}_\alpha = [c_\alpha, K] = \frac{\partial c_\alpha}{\partial \xi} \Gamma \frac{\partial K}{\partial \xi} = \frac{\partial c_\alpha}{\partial \xi} \Gamma \frac{\partial K}{\partial c_\beta} \frac{\partial c_\beta}{\partial \xi} = [c_\alpha, c_\beta] \frac{\partial K}{\partial c_\beta}. \quad (6.13)$$

La expresión anterior es exacta. La solución perturbada de orden n se obtiene cuando el miembro derecho de (6.13) se calcula con la solución $c_\beta^{(0)} + c_\beta^{(1)} + \dots + c_\beta^{(n-1)}$, análogamente a la ecuación (6.12). De la misma forma para el tiempo inicial $c_\beta^{(0)}(t_0) = c_\beta(t_0)$, con lo que $c_\beta^{(m)}(t_0) = 0$ para $m > 0$.

La ecuación (6.13) se suele expresar en la forma de paréntesis de Lagrange en mecánica celeste. Para ello multiplíquese (6.13) por $\{c_\gamma, c_\alpha\}$ y sùmese sobre α ,

$$\{c_\gamma, c_\alpha\} \dot{c}_\alpha = \{c_\gamma, c_\alpha\} [c_\alpha, c_\beta] \frac{\partial K}{\partial c_\beta} = -\delta_{\gamma\beta} \frac{\partial K}{\partial c_\beta} = -\frac{\partial K}{\partial c_\gamma}. \quad (6.14)$$

Llamamos *Función de perturbación* (*disturbing function*) a $R(c, t) = -K(Q(c, t), P(c, t), t)$. De este modo tenemos:

$$\boxed{\frac{\partial R}{\partial c_\alpha} = \{c_\alpha, c_\beta\} \dot{c}_\beta} \quad (6.15)$$

El tratamiento perturbativo de la ecuación anterior es equivalente al discutido referente a (6.13).

El carácter general de la variación temporal de los parámetros que caracterizan la órbita instantánea a partir de (6.12) se puede inferir fácilmente. Para ello pensemos en un movimiento puramente periódico para el caso sin perturbar, el ejemplo típico sería una órbita planetaria, y consideremos la solución hasta primer orden en λ , esto es, $\xi^{(0)} + \xi^{(1)}$. Queda claro que el lado derecho en las ecuaciones (6.7) es una función periódica temporal, del mismo período que el movimiento sin perturbar.¹ Sin embargo, la integral (6.9) de una función periódica no es necesariamente periódica. Si pensamos en un análisis de Fourier para $\dot{Q}_i^{(1)}$ y $P_i^{(1)}$ dadas en (6.7), $a_0 + \sum a_n \cos w_n t + \sum b_n \sin w_n t$, con $n \geq 1$, la integral sólo será una función periódica si y sólo si $a_0 = 0$, es decir, si la integral de la función en un período resulta ser nula. Esta observación fundamental implica dos tipos de variación para los parámetros que caracterizan la órbita instantánea:

¹Podría darse el caso de que el período fuese T_0/n , con T_0 el período del movimiento sin perturbar y n un número natural. No obstante, el único aspecto relevante en la discusión que se presenta es remarcar el hecho de que la función correspondiente se comporta periódicamente a intervalos dados por el período original T_0 .

- (a) Variación periódica: En este caso $a_0 = 0$ para todas las $\dot{Q}_i^{(1)}$ y $\dot{P}_i^{(1)}$, con lo que las variables $(Q^{(1)}, P^{(1)})$ siguen siendo periódicas y después de un cierto tiempo vuelven a su valor inicial. Los parámetros oscilan a primer orden alrededor del valor no perturbado y al promediar en el período del movimiento sin perturbar su oscilación desaparece dando lugar a valores promedio iguales al caso sin perturbar.

Aunque a primer orden las Q_i y las P_i tengan comportamiento periódico, éste en general no se mantendrá para órdenes superiores dado que tras la primera iteración nada garantiza que a_0 siga siendo cero para $\dot{Q}^{(2)}$ y $\dot{P}^{(2)}$, aun cuando lo haya sido para $\dot{Q}^{(1)}$ y $\dot{P}^{(1)}$.

- (b) Cambio secular: En este caso todas las $a_0 \neq 0$ con lo que la corrección no es periódica y hay una variación neta en los parámetros que caracterizan la órbita, de modo que éstos se van acumulando después de cada período orbital. Así al cabo de muchos períodos el cambio en el valor del parámetro puede ser muy grande correspondiendo a una órbita instantánea muy distinta a la no perturbada.

Por supuesto, se puede presentar una situación mixta en la que algunas de las a_0 sean cero y otras no. Las correspondientes variables canónicas tendrán entonces a primer orden un comportamiento de tipo oscilatorio o secular, respectivamente.

Ejemplo: El Oscilador anarmónico.

Observaremos que en el caso no perturbado el período no depende de la amplitud mientras que en el caso perturbado sí.

Consideremos el Hamiltoniano de un péndulo simple de longitud l :

$$H = \frac{p^2}{2ml^2} + mgl(1 - \cos\theta) = \frac{p^2}{2ml^2} + \frac{mgl\theta^2}{2} \left(1 - \frac{\theta^2}{12} + \frac{\theta^4}{360} + \dots \right) \quad (6.16)$$

En el límite de pequeñas oscilaciones, caso no perturbado, se tiene:

$$H_0 = \frac{p^2}{2ml^2} + \frac{mgl\theta^2}{2} . \quad (6.17)$$

Es claro que la energía no perturbada viene dada por:

$$E_0 = \frac{1}{2}mgl\theta_{\text{máx}}^2 , \quad (6.18)$$

ya que $\dot{\theta} = 0$, cuando $\theta = \theta_{\text{máx}}$. Consideraremos que nuestro parámetro pequeño es proporcional a θ_1 :

$$\theta_{\text{máx}} = \theta_1 , \quad \theta_1^2 = \frac{2E}{mgl} , \quad (6.19)$$

tal que,

$$\lambda = \frac{\theta_1^2}{6} = \frac{E_0}{3mgl} . \quad (6.20)$$

Así el Hamiltoniano (6.16) se puede reescribir como:

$$H = \frac{p^2}{2ml^2} + \frac{1}{2}mgl\theta^2 \left(1 - \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\theta}{\theta_1} \right)^2 + \frac{\lambda^2}{10} \left(\frac{\theta}{\theta_1} \right)^4 + \dots \right). \quad (6.21)$$

Nótese que $|\theta/\theta_1|$ puede hacerse 1 ya que θ_1 es el valor máximo de θ en el caso no perturbado. El parámetro pequeño es $\lambda \propto \theta_1$.

Para el caso del oscilador armónico se tiene:

$$S = -Qt + l\sqrt{2mQ} \int d\theta \sqrt{1 - \frac{m\omega^2 l^2 \theta^2}{2Q}}, \quad (6.22)$$

con $\omega^2 = g/l$ y Q la energía ,

$$Q = H_0 = \frac{1}{2I} (p^2 + I^2\omega^2\theta^2) \quad (6.23)$$

donde $I = ml^2$ (momento de inercia). Por otra parte, a partir de (6.22) es directo obtener que:

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{l} \sqrt{\frac{2Q}{m\omega^2}} \operatorname{sen}(\omega t - \omega P), \\ p &= l\sqrt{2mQ} \cos(\omega t - \omega P). \end{aligned} \quad (6.24)$$

Recordemos que Q representa la nueva coordenada y P el nuevo momento. La variación temporal de Q y P viene dada por:

$$\begin{aligned} \dot{P} &= -\frac{\partial K}{\partial Q} \rightarrow \omega \dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial(Q/\omega)}, \\ \dot{Q} &= \frac{\partial K}{\partial P} \rightarrow \frac{\dot{Q}}{\omega} = \frac{\partial K}{\partial(\omega P)}. \end{aligned}$$

De este modo en lo que sigue emplearemos como nuevas coordenadas y momentos:

$$Q' = \frac{Q}{\omega}, \quad P' = \omega P. \quad (6.25)$$

En estas nuevas variables (6.24) se reescribe como:

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{l} \sqrt{\frac{2Q'}{m\omega}} \operatorname{sen}(\omega t - P'), \\ p &= l\sqrt{2m\omega Q'} \cos(\omega t - P'). \end{aligned} \quad (6.26)$$

Considerando la primera corrección a H_0 a partir de (6.16) se tiene:

$$\begin{aligned} K &= \Delta H = -\frac{mgl\theta^4}{24} = -\frac{mgl}{24l^4} \left(\frac{2Q'}{m\omega} \right)^2 \operatorname{sen}^4(\omega t - P') \\ &= -\frac{Q'^2}{6ml^2} \operatorname{sen}^4(\omega t - P'). \end{aligned} \quad (6.27)$$

Para la evolución temporal de Q' y P' a primer orden resulta:

$$\begin{aligned}\dot{Q}' &= \frac{\partial K}{\partial P'} = \frac{2Q_0'^2}{3ml^2} \text{sen}^3(\omega t - P_0') \cos(\omega t - P_0') , \\ \dot{P}' &= -\frac{\partial K}{\partial Q'} = \frac{Q_0'}{3ml^2} \text{sen}^4(\omega t - P_0') .\end{aligned}\quad (6.28)$$

Calculando el promedio de \dot{P}' sobre un período:

$$\langle \dot{P}' \rangle = \frac{Q_0'\omega}{6\pi ml^2} \int_0^{2\pi} dt \text{sen}^4(\omega t - P_0') = \frac{Q_0'}{8ml^2} .\quad (6.29)$$

De este modo P' tiene un comportamiento secular. De modo que la fase P' en (6.26) oscila alrededor del valor,

$$\langle P \rangle = \langle \dot{P}(t) \rangle t + P_0' = \frac{Q_0'}{8ml^2} t + P_0' ,\quad (6.30)$$

Este resultado introducido en (6.26) da un cambio promedio en la frecuencia angular:

$$\omega' = \omega - \frac{Q_0'}{8ml^2} = \omega - \frac{E_0}{8m\omega l^2} = \omega \left(1 - \frac{\theta_1^2}{16} \right) ,\quad (6.31)$$

y efectivamente la frecuencia angular pasa a depender de la amplitud.

Por contra:

$$\langle \dot{Q}' \rangle = -\frac{2Q_0'^2}{3ml^2} \langle \text{sen}^3(\omega t - P_0') \cos(\omega t - P_0') \rangle = 0 .\quad (6.32)$$

Por lo tanto, $Q'(t)$ es periódica a primer orden (con período igual a π/ω , es decir, 1/2 del período del movimiento sin perturbar) y se tiene un comportamiento oscilatorio. Así, en promedio, y a primer orden, el valor de la energía no perturbada no cambia.

6.3. Teoría de perturbaciones directa

Sea el Hamiltoniano $H(\xi, \lambda, t) = H_0 + (H - H_0)$, donde H_0 es el Hamiltoniano sin perturbar y el resto es la perturbación que es proporcional al parámetro adimensional $\lambda \ll 1$. Buscamos soluciones de las ecuaciones canónicas en la forma de un desarrollo en serie en potencias de λ , $\xi = \xi^{(0)} + \lambda \xi^{(1)} + \lambda^2 \xi^{(2)} + \dots$. Sin embargo, puesto que dado un Hamiltoniano todavía hay que proceder a la obtención mediante derivación de las ecuaciones canónicas del movimiento, procedemos a realizar el desarrollo en potencias de λ de las ecuaciones de movimiento canónicas,

$$\dot{\xi} = \Gamma \frac{\partial H}{\partial \xi} .\quad (6.33)$$

Derivando,

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial H}{\partial \xi_\alpha} &= \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{\partial \xi_\beta}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial \xi_\beta} \right) \frac{\partial H}{\partial \xi_\alpha} = \frac{\partial^2 H}{\partial \lambda \partial \xi_\alpha} + \frac{\partial \xi_\beta}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 H}{\partial \xi_\alpha \partial \xi_\beta} . \\ \frac{d^2}{d\lambda^2} \frac{\partial H}{\partial \xi_\alpha} &= \frac{\partial^3 H}{\partial \lambda^2 \partial \xi_\alpha} + \frac{\partial^2 \xi_\beta}{\partial \lambda^2} \frac{\partial^2 H}{\partial \xi_\beta \partial \xi_\alpha} + 2 \frac{\partial \xi_\beta}{\partial \lambda} \frac{\partial^3 H}{\partial \xi_\alpha \partial \xi_\beta \partial \lambda} + \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial \lambda} \frac{\partial \xi_\beta}{\partial \lambda} \frac{\partial^3 H}{\partial \xi_\gamma \partial \xi_\beta \partial \xi_\alpha} ,\end{aligned}$$

y así sucesivamente. Finalmente se toma el límite $\lambda = 0$ en las expresiones anteriores dado que el desarrollo en serie de potencias de λ se realiza entorno a $\lambda = 0$. Igualando entonces los coeficientes de una cierta potencia de λ a ambos lados de (6.33) se tiene:

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_\rho^{(0)} &= \gamma_{\rho\alpha} \left. \frac{\partial H_0}{\partial \xi_\alpha} \right|_{\lambda=0}, \\
\dot{\xi}_\rho^{(1)} &= \gamma_{\rho\alpha} \left(\left. \frac{\partial^2 H}{\partial \lambda \partial \xi_\alpha} \right|_{\lambda=0} + \xi_\beta^{(1)} \left. \frac{\partial^2 H}{\partial \xi_\alpha \partial \xi_\beta} \right|_{\lambda=0} \right), \\
&= \gamma_{\rho\alpha} \left(\left. \frac{\partial^2 H}{\partial \lambda \partial \xi_\alpha} \right|_{\lambda=0} + \xi_\beta^{(1)} \left. \frac{\partial^2 H_0}{\partial \xi_\alpha \partial \xi_\beta} \right) \right), \\
\dot{\xi}_\rho^{(2)} &= \frac{1}{2} \gamma_{\rho\alpha} \left(\left. \frac{\partial^3 H}{\partial \lambda^2 \partial \xi_\alpha} \right|_{\lambda=0} + 2\xi_\beta^{(1)} \left. \frac{\partial^3 H}{\partial \xi_\alpha \partial \xi_\beta \partial \lambda} \right|_{\lambda=0} + 2\xi_\beta^{(2)} \left. \frac{\partial^2 H}{\partial \xi_\beta \partial \xi_\alpha} \right|_{\lambda=0} + \xi_\gamma^{(1)} \xi_\beta^{(1)} \left. \frac{\partial^3 H}{\partial \xi_\gamma \partial \xi_\beta \partial \xi_\alpha} \right|_{\lambda=0} \right) \\
&= \frac{1}{2} \gamma_{\rho\alpha} \left(\left. \frac{\partial^3 H}{\partial \lambda^2 \partial \xi_\alpha} \right|_{\lambda=0} + 2\xi_\beta^{(1)} \left. \frac{\partial^3 H}{\partial \xi_\alpha \partial \xi_\beta \partial \lambda} \right|_{\lambda=0} + 2\xi_\beta^{(2)} \left. \frac{\partial^2 H_0}{\partial \xi_\beta \partial \xi_\alpha} \right) + \xi_\gamma^{(1)} \xi_\beta^{(1)} \left. \frac{\partial^3 H_0}{\partial \xi_\gamma \partial \xi_\beta \partial \xi_\alpha} \right) \right). \quad (6.34)
\end{aligned}$$

Del mismo modo se pueden obtener los órdenes superiores al segundo. A diferencia que en la sección anterior los términos de la derecha no son funciones dadas de t , aun cuando la ecuación diferencial resultante para la corrección a un cierto orden ($n > 0$) es lineal en ella. Téngase en cuenta que una vez evaluadas las derivadas del Hamiltoniano en (6.34) sólo $\xi^{(0)}$ aparece puesto que finalmente $\lambda = 0$.

Las expresiones (6.34) se pueden simplificar más aún si el Hamiltoniano $H(\xi, \lambda, t)$ se expresa como serie de potencias en λ :

$$H(\xi, \lambda, t) = H_0(\xi, t) + \lambda H_1(\xi, t) + \frac{\lambda^2}{2} H_2(\xi, t) + \dots \quad (6.35)$$

De este modo tenemos para $\dot{\xi}^{(1)}$ y $\dot{\xi}^{(2)}$,

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_\rho^{(1)} &= \gamma_{\rho\alpha} \left(\frac{\partial H_1}{\partial \xi_\alpha} + \xi_\beta^{(1)} \frac{\partial^2 H_0}{\partial \xi_\alpha \partial \xi_\beta} \right), \\
\dot{\xi}_\rho^{(2)} &= \frac{1}{2} \gamma_{\rho\alpha} \left(\frac{\partial H_2}{\partial \xi_\alpha} + 2\xi_\beta^{(1)} \frac{\partial^2 H_1}{\partial \xi_\alpha \partial \xi_\beta} + 2\xi_\beta^{(2)} \frac{\partial^2 H_0}{\partial \xi_\beta \partial \xi_\alpha} + \xi_\gamma^{(1)} \xi_\beta^{(1)} \frac{\partial^3 H_0}{\partial \xi_\gamma \partial \xi_\beta \partial \xi_\alpha} \right). \quad (6.36)
\end{aligned}$$

6.4. Invariantes adiabáticos

Consideremos un Hamiltoniano $H(q, p, \lambda)$, que se puede tratar mediante variables acción-ángulo para todos los valores de λ en algún intervalo. Supongamos ahora que λ no es una constante sino que varía con el tiempo en dicho intervalo. Pero se supone que lo hace lentamente, así veremos que las variables acción siguen siendo útiles ya que se mantienen constantes de forma muy aproximada. Más precisamente, si λ cambia en $\Delta\lambda$ en un intervalo de tiempo T , el cambio en J es proporcional a $\Delta\lambda/T$. Esto implica que, independientemente de lo grande que sea el cambio en $\Delta\lambda$, el cambio en J se

puede hacer arbitrariamente pequeño haciendo que suceda en un intervalo de tiempo T suficientemente grande.

Probemos nuestra afirmación anterior. Si $\lambda = cte$ suponemos que ya hemos hallado las variables acción-ángulo, así:

$$J_i(Q, \lambda) = \oint p_i dq_i, \quad p_i(q_i, Q, \lambda) = \frac{\partial W_i}{\partial q_i}. \quad (6.37)$$

De la primera de ellas, invirtiéndola, se obtiene, $Q_i(J, \lambda)$ y $\widehat{W}(q, J, \lambda) = W(q, Q(J, \lambda), \lambda)$. También está claro que:

$$p_i = \frac{\partial \widehat{W}_i}{\partial q_i}, \quad w_i = \frac{\partial \widehat{W}_i}{\partial J_i}, \quad (6.38)$$

donde $\widehat{W} = \widehat{W}(q, J, \lambda)$ es una función generatriz y aunque λ varíe con el tiempo sigue dando lugar a transformaciones canónicas dadas por las ecuaciones (6.38).

El nuevo Hamiltoniano viene dado por:

$$K(w, J, \lambda) = H + \frac{\partial \widehat{W}}{\partial t} = H(J, \lambda) + \left[\frac{\partial \widehat{W}(q, J, \lambda)}{\partial \lambda} \right] \dot{\lambda}. \quad (6.39)$$

H no depende de w ya que, para λ constante, tenemos variables usuales de acción-ángulo donde H no depende de w y la relación funcional entre (q, p) y (J, w) no cambia independientemente del valor de λ . Por otra parte, una vez evaluada $\partial \widehat{W} / \partial \lambda$ la expresamos como una función de (w, J) en lugar de (q, J) y la llamamos $W_\lambda(w, J, \lambda)$:

$$K(w, J, \lambda) = H(J, \lambda) + W_\lambda(w, J, \lambda) \dot{\lambda}. \quad (6.40)$$

Hallemos las ecuaciones de movimiento:

$$\dot{w}_i = \frac{\partial K}{\partial J_i} = \frac{\partial H}{\partial J_i} + \frac{\partial W_\lambda}{\partial J_i} \dot{\lambda} = \nu_i(J, \lambda) + \frac{\partial W_\lambda}{\partial J_i} \dot{\lambda}. \quad (6.41)$$

A las funciones $\nu_i(J, \lambda)$ se las llama frecuencias locales (si λ fuese constante serían las frecuencias del sistema). Además,

$$\dot{J}_i = -\frac{\partial K}{\partial w_i} = -\frac{\partial W_\lambda}{\partial w_i} \dot{\lambda}, \quad (6.42)$$

que no son constantes de movimiento (sólo lo son si $\dot{\lambda} = 0$).

Calculemos a continuación el cambio de W_λ en un ciclo de q_i :

$$\Delta_i W_\lambda = \oint \frac{\partial W_\lambda}{\partial q_i} dq_i = \frac{\partial}{\partial \lambda} \oint \frac{\partial \widehat{W}_i(q_i, J, \lambda)}{\partial q_i} dq_i = \frac{\partial J_i}{\partial \lambda} = 0, \quad (6.43)$$

ya que en \widehat{W} se toma la derivada parcial respecto de λ manteniendo (q, J) constantes. Así, W_λ es una función periódica en las w_i , que siguen cumpliendo que varían en una unidad cuando q_i hace un

ciclo y cero en cualquier otro ciclo. Recuérdese que estos ciclos se toman en el espacio de fase (q_i, p_i) , dado que el sistema se supone separable, y que no involucran cambios en el resto de variables ni en el tiempo. De este modo, W_λ admite el desarrollo de Fourier que ya hemos visto con anterioridad en las variables w_i , análogo a (5.112), y, por lo tanto, $\partial W_\lambda / \partial w_i$ carece de términos con $m_i = 0$, para todo i , así que:

$$\int_{w_i}^{w_i+1} \frac{\partial W_\lambda}{\partial w'_i} dw'_i = 0 . \quad (6.44)$$

Supongamos que λ es una función que varía lentamente con el tiempo tal que:

$$|\dot{\lambda}| < \epsilon , \quad (6.45)$$

con ϵ arbitrariamente pequeño. Sea $t = 0$ el tiempo inicial, tomemos $w_\alpha(0) = 0$ por conveniencia. Entonces:

$$|\Delta_T J_i| = \left| \int_0^T \frac{\partial W_\lambda}{\partial w_i} \dot{\lambda} dt \right| = \left| \int_0^{w_i(T)} \frac{\dot{\lambda}}{\dot{w}_i} \frac{\partial W_\lambda}{\partial w_i} dw_i \right| , \quad (6.46)$$

donde hemos supuesto que de $w_i(t)$ se puede despejar $t = t(w_i)$. Recordemos además (6.41), con lo que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\dot{w}_i} &= \frac{1}{\nu_i + \frac{\partial W_\lambda}{\partial J_i} \dot{\lambda}} = \frac{1}{\nu_i} \left(1 - \frac{\partial W_\lambda}{\partial J_i} \frac{\dot{\lambda}}{\nu_i} + \left(\frac{\partial W_\lambda}{\partial J_i} \frac{\dot{\lambda}}{\nu_i} \right)^2 + \dots \right) \Rightarrow \\ \left| \frac{1}{\dot{w}_i} \right| &= \left| \frac{1}{\nu_i} \right| + \mathcal{O}(\epsilon) . \end{aligned} \quad (6.47)$$

Introduciendo este resultado en (6.46) se tiene:

$$|\Delta_T J_i| < \epsilon \left| \int_0^{w_i(T)} \frac{\partial W_\lambda}{\partial w_i} \frac{dw_i}{\dot{w}_i} \right| = \epsilon \left| \frac{1}{\nu_i} \int_0^{w_i(T)} \frac{\partial W_\lambda}{\partial w_i} dw_i \right| + \mathcal{O}(\epsilon^2) . \quad (6.48)$$

En virtud de (6.44) la integral (6.48) está acotada:

$$|\Delta_T J_i| < \epsilon \frac{B}{\nu_i} , \quad (6.49)$$

ya que:

$$\left| \int_0^{w_i(T)} \frac{\partial W_\lambda}{\partial w_i} dw_i \right| \leq B \quad \text{no depende de } T , \quad (6.50)$$

y viene dada por el remanente del último ciclo que todavía no se ha completado tras el tiempo T en virtud de (6.44). Haciendo ϵ arbitrariamente pequeño en (6.49) así resulta el correspondiente cambio en J_i , puesto que el resto de factores a la derecha de (6.49) son finitos y no crecen con T .

A lo largo del desarrollo hemos supuesto que \dot{w}_i era suficientemente pequeño, siendo éste el “punto débil” del razonamiento. Es decir, hemos supuesto que ν_i tuviese inversa para todo λ y que en el intervalo $0 \rightarrow T$ no se hace arbitrariamente pequeña al variar λ de modo que (6.48) quede justificada.

Ejemplos

Consideremos el Hamiltoniano:

$$H = \frac{1}{2} (p^2 + \lambda^2 q^2) . \quad (6.51)$$

De aquí obtenemos:

$$\begin{aligned} W &= \int \sqrt{2Q - \lambda^2 q^2} dq , \\ J &= \oint \sqrt{2Q - \lambda^2 q^2} dq = \sqrt{2Q} \oint \sqrt{1 - \frac{\lambda^2 q^2}{2Q}} dq . \end{aligned} \quad (6.52)$$

Por lo tanto:

$$J = \frac{2\pi}{\lambda} Q , \quad Q = \frac{\lambda J}{2\pi} , \quad \nu = \frac{\partial Q}{\partial J} = \frac{\lambda}{2\pi} . \quad (6.53)$$

Entonces,

$$\widehat{W} = \int \lambda \sqrt{\frac{J}{\pi\lambda} - q^2} dq , \quad (6.54)$$

de donde se deduce,

$$q = \sqrt{\frac{J}{\pi\lambda}} \operatorname{sen}(2\pi w) . \quad (6.55)$$

Ahora:

$$\frac{\partial \widehat{W}}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \int \sqrt{\frac{J\lambda}{\pi} - \lambda^2 q^2} dq = \left(\frac{J}{4\lambda\pi} \right) \operatorname{sen}(4\pi w) . \quad (6.56)$$

Y recordemos que:

$$K = H + \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \lambda} \dot{\lambda} . \quad (6.57)$$

Entonces, es inmediato obtener,

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \frac{\partial K}{\partial J} = \frac{\lambda}{2\pi} + \dot{\lambda} \frac{\operatorname{sen}(4\pi w)}{4\pi\lambda} , \\ \dot{J} &= -\frac{\partial K}{\partial w} = -\frac{J\dot{\lambda}}{\lambda} \cos(4\pi w) . \end{aligned} \quad (6.58)$$

Supongamos que para $t \geq 0$, $\lambda(t) = \lambda_1 + \epsilon t$. De (6.58) se tiene:

$$\dot{w} = \frac{\lambda_1}{2\pi} + \epsilon \frac{t}{2\pi} + \epsilon \frac{\text{sen}(4\pi w)}{4\pi(\lambda_1 + \epsilon t)}. \quad (6.59)$$

Calculemos ahora la variación de $\ln J$ en un ciclo,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \frac{\dot{J}}{J} dt \right| &= \left| \log \left(\frac{J(T)}{J(0)} \right) \right| = \left| \int_0^T \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \cos(4\pi w) dt \right| = \\ &= \epsilon \left| \int_0^{w(T)} \frac{\cos(4\pi w)}{\dot{w}\lambda} dw \right| = \epsilon \left| \int_0^{w(T)} \frac{\cos(4\pi w) dw}{(\lambda_1 + \epsilon t) \left(\frac{\lambda_1}{2\pi} + \epsilon \frac{t}{2\pi} + \epsilon \frac{\text{sen}(4\pi w)}{4\pi(\lambda_1 + \epsilon t)} \right)} \right|. \end{aligned} \quad (6.60)$$

Fijemos nuestra atención en el denominador, desarrollando tenemos:

$$\begin{aligned} &\frac{\lambda_1^2}{2\pi} + \epsilon \left\{ \frac{\lambda_1 t}{2\pi} + \frac{t}{2\pi} \lambda_1 + \lambda_1 \frac{\text{sen}(4\pi w)}{4\pi(\lambda_1 + \epsilon t)} \right\} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= \frac{\lambda_1^2}{2\pi} + \epsilon \left\{ \frac{\lambda_1 t}{\pi} + \frac{\text{sen}(4\pi w)}{4\pi} \right\} + \mathcal{O}(\epsilon^2) = \frac{1}{2\pi} \left(\lambda^2 + \frac{\epsilon}{2} \text{sen}(4\pi w) \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \end{aligned} \quad (6.61)$$

donde se ha tenido en cuenta:

$$\lambda^2 = (\lambda_1 + \epsilon t)^2 = \lambda_1^2 + 2\epsilon t + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (6.62)$$

Entonces hasta orden ϵ^2 (6.60) queda:

$$\left| \int_0^T \frac{\dot{J}}{J} dt \right| = \epsilon \left| 2\pi \int_0^{w(T)} dw \frac{\cos(4\pi w)}{\lambda_1^2} \right| + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (6.63)$$

Se deduce por tanto,

$$\left| \ln \frac{J(t)}{J(0)} \right| = \left| \int_0^T \frac{\dot{J}}{J} dt \right| = \frac{\epsilon}{2\lambda_1^2} \left| 4\pi \int_0^T dw \cos(4\pi w) \right| \leq \frac{\epsilon}{2\lambda_1^2}. \quad (6.64)$$

Aplicación

Una aplicación del ejemplo anterior es considerar un péndulo simple cuya longitud varía lentamente (Péndulo de Ehrenfest). De nuevo con el Hamiltoniano (6.51), en $t \leq 0$ se tiene:

$$q = A_i \cos(\lambda_i t), \quad p = -\lambda_i A_i \text{sen}(\lambda_i t). \quad (6.65)$$

La variable acción es:

$$J_i = \oint pdq = \oint (\lambda_i A_i \text{sen}(\lambda_i t))^2 dt = \lambda_i^2 A_i^2 \frac{\pi}{\lambda_i} = \lambda_i A_i^2 \pi, \quad (6.66)$$

resultado que también se obtiene por simple inspección de (6.53). Después de iniciarse la dependencia temporal λ cambia con el tiempo, tal que tras un tiempo T la elongación final es λ_f . La nueva variable acción viene dada por,

$$J_f = \pi \lambda_f A_f^2, \quad (6.67)$$

con λ_f el valor de $\lambda(t)$ característico para un ciclo alrededor de $t = t_f$ dado que λ varía lentamente. Entonces, igualando los valores de la variable acción para los tiempos inicial y final:

$$\lambda_f A_f^2 = \lambda_i A_i^2 \Rightarrow \frac{A_f}{A_i} = \sqrt{\frac{\lambda_i}{\lambda_f}}, \quad (6.68)$$

que da la relación entre las elongaciones. Para la energía, teniendo en cuenta que,

$$E = \frac{1}{2} \lambda^2 A^2, \quad \begin{cases} E_f \propto \lambda_f^2 A_f^2 \\ E_i \propto \lambda_i^2 A_i^2 \end{cases} \quad (6.69)$$

Realizando el cociente:

$$\frac{E_f}{E_i} = \frac{\lambda_f^2 A_f^2}{\lambda_i^2 A_i^2} = \frac{\lambda_f^2 \lambda_i}{\lambda_i^2 \lambda_f} = \frac{\lambda_f}{\lambda_i}, \quad (6.70)$$

luego:

$$\boxed{E_f \lambda_i = E_i \lambda_f} \quad (6.71)$$

Sustituyendo $\lambda_f = \lambda_i + \Delta\lambda$ en (6.71) tenemos:

$$E_f \lambda_i = E_i (\lambda_i + \Delta\lambda) \Rightarrow E_f = E_i + E_i \frac{\Delta\lambda}{\lambda_i} \Rightarrow \Delta E = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} E. \quad (6.72)$$

Capítulo 7

Teoría clásica de campos

7.1. Introducción: Transición de un sistema continuo a otro discreto

Los campos son sistemas físicos con un número infinito de grados de libertad en la forma de sistemas continuos, tal que cada punto \vec{x} en el sistema evoluciona independientemente de cualquier otro punto aunque sujeto a ciertas condiciones de continuidad. El sistema se puede describir por una función o conjunto de funciones continuas $\psi_A(\vec{x}, t)$, que junto con sus derivadas primeras, especifican el estado en el instante t . Es habitual denominar a las funciones anteriores como las componentes del campo o funciones campo.¹

7.1.1. La cadena lineal

A través de la cadena lineal, podemos observar la transición de la mecánica de un sistema discreto de partículas a la mecánica de un continuo.

Supongamos una cadena lineal cerrada formada por N partículas idénticas de masa m . Estas partículas están unidas por muelles con la misma constante k y representan las fuerzas elásticas entre dichas partículas. En el equilibrio la cadena es un anillo de radio R y la distancia entre partículas contiguas es la misma para todas ellas e igual a a .

Las desviaciones respecto a la posición de equilibrio sólo ocurren a lo largo de la circunferencia del anillo y así dichos desplazamientos son unidimensionales. Si designamos la desviación de la partícula i -ésima para u_i , la energía cinética viene dada por:

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m \dot{u}_i^2, \quad (7.1)$$

y el potencial, en el límite de pequeñas oscilaciones, corresponde a:

$$V = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} k (u_{i+1} - u_i)^2, \quad (7.2)$$

¹En este capítulo empleamos el convenio de suma sobre índices latinos repetidos.

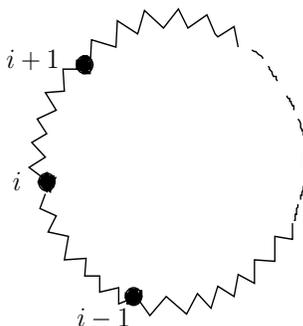


Figura 7.1: Cadena lineal.

donde $\dot{u}_i = du_i/dt$ y se impone la condición de periodicidad $u_{N+1} = u_1$. Por tanto, el Lagrangiano del sistema viene dado por:

$$L = T - V = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{u}_i^2 - \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} k (u_{i+1} - u_i)^2, \quad (7.3)$$

y la acción es:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt. \quad (7.4)$$

Las ecuaciones de movimiento se obtienen imponiendo que la acción sea estacionaria:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0, \quad \delta u_i(t_1) = \delta u_i(t_2) = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (7.5)$$

dando lugar a las ecuaciones de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial L}{\partial u_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_i} = 0. \quad (7.6)$$

Realizando las derivadas:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_i} = m \ddot{u}_i, \quad (7.7)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_i} = k(u_{i+1} - u_i) - k(u_i - u_{i-1}),$$

$$m \ddot{u}_i = k(u_{i+1} - u_i) - k(u_i - u_{i-1}). \quad (7.8)$$

Para llegar al caso en que la masa de la cadena se distribuye de forma continua, consideremos el límite en que $a \rightarrow 0$, $m \rightarrow 0$ pero $\rho = m/a$ (densidad lineal de masa) y $\varepsilon = ka$ (módulo de Young) permanecen finitos.

Dado que la longitud de la cadena no cambia, el número de partículas ($2\pi R/a$) tiende a infinito y, por tanto, así también el número de los grados de libertad. El subíndice discreto i que indicaba la partícula pasa ahora a la variable continua x , que especifica la posición sobre el anillo, así:

$$i \rightarrow x, \quad a \rightarrow dx. \quad (7.9)$$

El desplazamiento $u_i(t) \rightarrow u(x, t)$ pasa ahora a ser una función de dos variables continuas cumpliendo la condición de periodicidad:

$$u(x + 2\pi R, t) = u(x, t), \quad (7.10)$$

el análogo al caso discreto cuando se impuso que $u_{N+1} = u_1$. Entonces, teniendo en cuenta que:

$$u_i - u_{i-1} = a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathcal{O}(a^3), \quad (7.11)$$

se deduce fácilmente que,

$$(u_{i+1} - u_i) - (u_i - u_{i-1}) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (7.12)$$

Las ecuaciones de movimiento (7.8) quedan como:

$$\rho a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (7.13)$$

Por tanto:

$$\boxed{\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0} \quad (7.14)$$

Que se trata de una ecuación de ondas longitudinales de velocidad $(\varepsilon/\rho)^{1/2}$.

Consideremos a continuación el paso al límite $N \rightarrow \infty$ a nivel del Lagrangiano y deduzcamos la ecuación (7.14) directamente mediante el empleo del Lagrangiano en un principio variacional en el límite de sistema continuo.

$$L_N = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \rho a i \dot{u}_i^2 - \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} a (ka) \frac{(u_{i+1} - u_i)^2}{a^2}. \quad (7.15)$$

Para $N \rightarrow \infty$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} L_N = \int dx \left[\frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] = \int dx \mathcal{L}. \quad (7.16)$$

La integral se extiende sobre el anillo y \mathcal{L} es la *densidad Lagrangiana*. En este límite la acción (7.4) viene dada por:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int dx \mathcal{L} = \int dt \int dx \left\{ \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\}. \quad (7.17)$$

Dado un cambio en la función $u(x, t) \rightarrow u(x, t) + \delta u(x, t)$, la acción varía en la forma:

$$\begin{aligned}
 \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int dx \left\{ \rho \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \delta u}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \delta u}{\partial x} \right\} \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int dx \left\{ -\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u + \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \delta u \right) + \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \delta u - \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \delta u \right) \right\} \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int dx \left\{ -\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\} \delta u + \int dx \left[\rho \frac{\partial u}{\partial t} \delta u \right]_{t_1}^{t_2} - \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial u}{\partial x} \delta u \right]_{x_0}^{x_0+2\pi R}.
 \end{aligned} \tag{7.18}$$

Dado que $u(x, t)$ satisface la condición de periodicidad (7.10) así lo hará $\delta u(x, t)$ y, además, al igual que en mecánica de un sistema discreto de partículas, $\delta u(x, t_{1,2}) = 0$. Siguiendo con la generalización del caso discreto al continuo, imponemos igualmente que la acción sea estacionaria bajo tales variaciones en $u(x, t)$. Resumiendo imponemos:

$$\begin{aligned}
 \delta S &= 0, \\
 \delta u(x, t_1) &= \delta u(x, t_2) = 0, \\
 \delta u(x, t) &= \delta u(x + 2\pi R, t).
 \end{aligned} \tag{7.19}$$

Como consecuencia de las condiciones anteriores es directo comprobar que las dos últimas integrales en (7.18) se anulan idénticamente. Por otra parte, dado que δu es arbitrario, excepto por las condiciones de frontera (7.19), se deduce la correcta ecuación de ondas a partir de la primera integral en (7.18).²

$$\boxed{\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0} \tag{7.20}$$

El sistema concreto que hemos considerado hasta ahora se extiende en un dominio finito en una única dimensión. Es mucho más habitual encontrarnos con sistema en un dominio infinito. En tales casos no tendremos condiciones de contorno periódicas (muy naturales en nuestro presente ejemplo) sino otras, por ejemplo, que los campos se anulen de forma suficientemente rápida para $|\vec{x}| \rightarrow \infty$, cuando éstos se propaguen con una velocidad finita.

7.2. Formulación Lagrangiana de la teoría de campos

Procedamos a la generalización de los resultados expuestos en la sección anterior y consideremos el problema variacional general correspondiente a la dinámica de un continuo.

²También llegamos a las ecuaciones correctas haciendo:

$$\delta u \Big|_{\Gamma} = 0,$$

siendo Γ la frontera del dominio de la integración doble (sobre el tiempo y sobre el anillo) en la acción (7.17) $t \in [t_1, t_2]$ y $x \in [0, 2\pi R]$. La frontera constituye el conjunto de puntos (x, t) con $t = t_1$ o $t = t_2$ para $\forall x \in [0, 2\pi R]$ y para $\forall t \in [t_1, t_2]$ con $x = 0$ o $x = 2\pi R$. Éste es un caso particular de las condiciones (7.19) innecesariamente más generales. Además, tiene la ventaja de que establece un tratamiento completamente simétrico entre las variables espaciales y el tiempo.

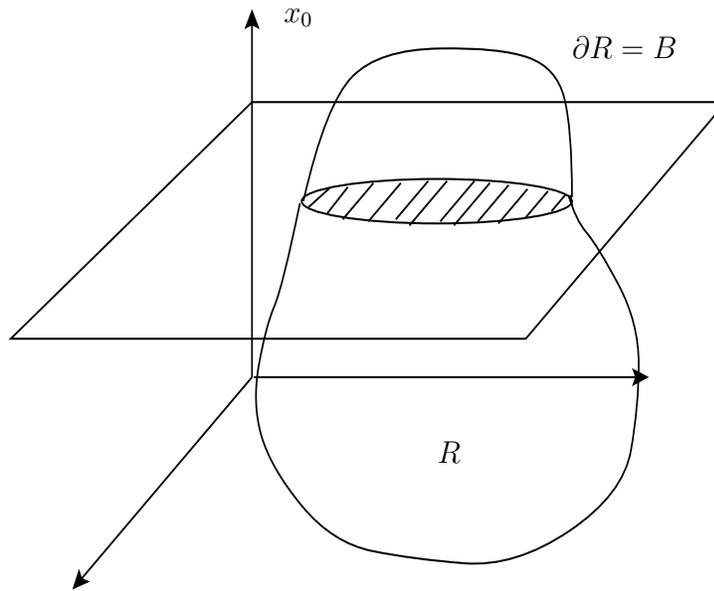


Figura 7.2: Las dimensiones espaciales vienen representadas por el plano inferior y el tiempo por el eje x_0 .

Se quiere determinar los campos en R , ver figura 7.2, una vez conocidas sus componentes sobre la frontera B de R , siendo ésta última una región del espacio-tiempo en dos, tres, cuatro, etc dimensiones, una de las cuales siempre es el tiempo. Planteamos ahora el problema mediante la generalización del principio de Hamilton visto en la sección 2.1. Las funciones del campo $\psi_A(x)$, $A = 1, \dots, f$ (por ejemplo, para caracterizar el movimiento de un fluido $f = 3$) son aquellas que verifican las condiciones de contorno adecuadas en B y para las cuales la acción S es estacionaria.

$$S = \int_R L dt = \int_R \mathcal{L} \left(x; \psi(x), \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \right) d^n x \tag{7.21}$$

Por ejemplo, para los casos más habituales $n = 2$: $x = (x^0, x^1)$, $d^2x = dx^0 dx^1$; $n = 3$: $x = (x^0, x^1, x^2)$, $d^3x = dx^0 dx^1 dx^2$; $n = 4$: $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$, $d^4x = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$, y así sucesivamente para dimensiones superiores, con $x^0 = t$. Nótese que la densidad Lagrangiana sólo es función de las componentes y de sus derivadas primeras.

Como se han de verificar las condiciones de contorno adecuadas se toma:

$$\delta \psi_A(x) = 0, \forall x \in B, \tag{7.22}$$

con lo que se garantiza que $\psi'_A(x) = \psi_A(x) + \delta \psi_A(x)$ también satisfaga las correctas condiciones de contorno.

La variación de la acción es:³

$$\delta S = \int_R \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_A} \delta \psi_A + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{A,\alpha}} \delta \psi_{A,\alpha} \right) d^n x, \tag{7.23}$$

³Aclaremos que en lo que sigue, los subíndices o superíndices en letras griegas van de 0 a $n - 1$, y los subíndices o superíndices en letras latinas van de 1 a $n - 1$.

donde $\psi_{A,\alpha} = \partial\psi_A/\partial x^\alpha$. Desarrollando el segundo sumando del integrando, aplicando la regla de derivación del producto de funciones, tenemos:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_{A,\alpha}}\delta\psi_{A,\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_{A,\alpha}}\delta\psi_A \right) - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_{A,\alpha}} \right) \delta\psi_A . \quad (7.24)$$

Sustituyendo la expresión anterior en (7.23) resulta:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_R \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_A} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_{A,\alpha}} \right) \right] \delta\psi_A d^n x + \int_R \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_{A,\alpha}}\delta\psi_A \right) d^n x = \\ &= \int_R \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_A} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_{A,\alpha}} \right) \right] \delta\psi_A d^n x + \int_B \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_{A,\alpha}} dB_\alpha \delta\psi_A = \\ &= \int_R \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_A} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_{A,\alpha}} \right) \right] \delta\psi_A d^n x = 0 . \end{aligned} \quad (7.25)$$

Donde se ha hecho uso del teorema de Gauss y de que $\delta\psi_A = 0$ sobre la frontera B , por tanto:

$$\boxed{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_A} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_{A,\alpha}} \right) = 0} \quad (7.26)$$

Éstas son las ecuaciones de Euler-Lagrange, que son ecuaciones diferenciales de segundo orden en derivadas parciales. Si la densidad Lagrangiana dependiera de derivadas de las componentes del campo de orden superior al primero, las ecuaciones resultantes serían de orden superior al segundo y no sería suficiente el conocimiento de las componentes sobre B para proceder a su cálculo mediante la resolución de las ecuaciones diferenciales correspondientes. La solución de (7.26) proporciona la evolución real del sistema $\psi_A(x)$, $A = 1, \dots, f$. Además, al ser deducidas de un principio variacional se garantiza que (7.26) sean mutuamente compatibles, aspecto éste no trivial.

Merece la pena indicar que si realizamos un cambio de coordenadas tal que $x' = x'(x)$, entonces de (7.21), teniendo en cuenta que

$$d^n x = \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right| d^n x' , \quad (7.27)$$

llegamos a:

$$S = \int_R \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right| \mathcal{L} \left(x; \psi(x), \frac{\partial\psi(x)}{\partial x} \right) d^n x' \equiv \int_R \mathcal{L}' \left(x(x'); \psi'(x'), \frac{\partial\psi'(x')}{\partial x'} \right) d^n x' , \quad (7.28)$$

donde $\psi'_A(x') = \psi_A(x(x'))$ y \mathcal{L}' es la nueva Lagrangiana en las nuevas coordenadas. La densidad Lagrangiana \mathcal{L} está indeterminada en la divergencia de una función arbitraria:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' &= \mathcal{L} + \frac{\partial\lambda^\alpha(x; \psi_A)}{\partial x^\alpha} , \\ S \rightarrow S' &= S + \int_R \frac{\partial\lambda^\alpha}{\partial x^\alpha} d^n x = S + \int_B \lambda^\alpha dB_\alpha . \end{aligned} \quad (7.29)$$

Esta última integral está fijada por las condiciones de contorno, con lo que:

$$\delta S' = \delta S . \quad (7.30)$$

Así, tanto S' como S conducen a las mismas ecuaciones de Euler-Lagrange cuando la variación anterior se iguala a cero.

Identificar los grados de libertad elementales, que corresponderán a campos determinados, y formular la densidad Lagrangiana correspondiente es uno de los grandes problemas de la física teórica para conseguir describir las interacciones fundamentales.

Supongamos que tenemos un sistema compuesto de dos campos de componentes ψ_A y χ_B , respectivamente. Sean $\mathcal{L}_1(\psi)$ y $\mathcal{L}_2(\chi)$ las densidades Lagrangianas de cada sistema por separado. Entonces,

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_1(\psi) + \mathcal{L}_2(\chi) , \quad (7.31)$$

conduce a las mismas ecuaciones de Lagrange que \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 por separado. La interacción entre los campos ψ_A y χ_B se puede generar a partir de un término de interacción $\mathcal{L}_I(\psi, \chi)$ que acopla los campos ψ_A y χ_B y que se añade a \mathcal{L}_0 ,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1(\psi) + \mathcal{L}_2(\chi) + \mathcal{L}_I(\psi, \chi) . \quad (7.32)$$

Para sistemas cerrados, por invarianza bajo traslaciones espacio-temporales, las densidades Lagrangianas no pueden depender explícitamente de punto espacio-temporal.⁴ En el caso general de un sistema no aislado, su densidad Lagrangiana puede depender además explícitamente de x .

Ejemplo

Apliquemos este formalismo al sistema de muelles acoplados ($n = 2$) cuya densidad Lagrangiana se obtiene directamente a partir de (7.16):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2}\varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 . \quad (7.33)$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange (7.26) para este caso son:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{,0}} = \rho u_{,0} , \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{,1}} = -\varepsilon u_{,1} , \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0 .$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{,\alpha}} \right) = 0 \Rightarrow \boxed{\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0}$$

y de nuevo se recupera (7.14).

7.2.1. Derivada funcional

La acción es un funcional de $\psi_A(x)$. Dadas unas funciones $\psi_A(x)$ se establece una aplicación sobre \mathbb{R} mediante la integral:

$$S[\psi_A] = \int_R d^n x \mathcal{L} \left(x; \psi, \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) , \quad (7.34)$$

⁴Para simplificar la notación sólo se ha indicado la dependencia de las densidades Lagrangianas con las componentes del campo.

siendo R una región cerrada. Dada una variación en ψ_A tal que $\psi_A \rightarrow \psi_A + \delta\psi_A$ con $\psi_A(x) = 0$ $\forall x \in \partial R$, escribimos:

$$\delta S = S[\psi_A + \delta\psi_A] - S[\psi_A] = \int_R d^n x \frac{\delta S}{\delta\psi_A(x)} \delta\psi_A(x) + \mathcal{O}((\delta\psi_A)^2) , \quad (7.35)$$

donde $\delta S/\delta\psi_A(x)$ es la *derivada funcional* de S respecto de $\psi_A(x)$. De su definición está claro que en general la derivada funcional puede depender explícitamente del punto x además de las componentes del campo ψ_A y de sus derivadas primeras y segundas.

De (7.25) es directo deducir que:⁵

$$\frac{\delta S}{\delta\psi_A(x)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_A} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{A,\alpha}} \right) . \quad (7.36)$$

De este modo las ecuaciones de Euler-Lagrange se pueden expresar simplemente como:

$$\boxed{\frac{\delta S}{\delta\psi_A(x)} = 0} \quad (7.37)$$

En general, dado un funcional $F[\psi_A]$ se define su derivada funcional tal que:

$$\delta F = \int_R d^n x \frac{\delta F}{\delta\psi_A(x)} \delta\psi_A(x) + \mathcal{O}((\delta\psi)^2) , \quad (7.38)$$

una vez se han eliminado las contribuciones en la frontera imponiendo que tanto $\delta\psi_A$ como sus derivadas, hasta el orden suficiente, sean nulas en ∂R .⁶ Por supuesto, $d^n x$ se ha de especificar de antemano y puede no contener el tiempo en el caso genérico. Para la acción S , $d^n x = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$ en coordenadas cartesianas, siempre el tiempo es una de las dimensiones, pero incluso aquí el número de dimensiones espaciales puede variar. Como ejemplo de un funcional F donde no aparezca el tiempo, tómese por ejemplo:

$$Q[\rho; t] = \int d\mathbf{x} \rho(x, t) , \quad (7.39)$$

que es un funcional de ρ , que depende de t pues no aparece como variable de integración. Trivialmente, $\delta Q/\delta\rho(\vec{x}, t) = 1$.

7.3. Teorema de Noether e integrales de las ecuaciones de campo

Consideremos una transformación continua de las variables independientes y de las componentes del campo:

$$x \rightarrow x' , \quad \psi_A(x) \rightarrow \psi'_A(x') , \quad A = 1, \dots, f . \quad (7.40)$$

⁵Siempre teniendo en cuenta las condiciones de contorno: $\delta\psi_A = 0$ en ∂R .

⁶Para el caso genérico téngase en cuenta que el funcional F puede depender de derivadas de ψ_A de orden superior al primero.

Las nuevas variables y componentes del campo dependen de uno o varios parámetros continuos que caracterizan la transformación. Por ejemplo, 3 parámetros son necesarios para caracterizar las rotaciones y traslaciones en \mathbb{R}^3 , etc.

Diremos que dicha transformación es una *simetría* si:

$$\begin{aligned}\Delta S &= \int d^n x' \mathcal{L} \left(x'; \psi'_A(x'), \frac{\partial \psi'_A(x')}{\partial x'} \right) - \int d^n x \mathcal{L} \left(x; \psi_A(x), \frac{\partial \psi_A(x)}{\partial x} \right) = \\ &= \int d^n x \frac{\partial \lambda^\alpha(x; \psi_A)}{\partial x^\alpha},\end{aligned}\quad (7.41)$$

donde seguimos el mismo convenio que en la sección 2.5 para un sistema discreto de partículas y así $\mathcal{L} \left(x'; \psi'_A(x'), \frac{\partial \psi'_A(x')}{\partial x'} \right)$ tiene la misma dependencia funcional en las nuevas variables y componentes del campo que la densidad Lagrangiana original $\mathcal{L} \left(x; \psi_A(x), \frac{\partial \psi_A(x)}{\partial x} \right)$. Dado que para una simetría

$$\Delta S = S' - S = \int d^n x \frac{\partial \lambda^\alpha(x; \psi_A)}{\partial x^\alpha}, \quad (7.42)$$

según (7.41), al aplicar el principio de Hamilton ($\delta\psi_A = 0$ en ∂R):

$$\delta S = \delta S' = 0, \quad (7.43)$$

Así, si las funciones de campo $\psi_A(x)$ son soluciones de las ecuaciones de movimiento, las $\psi'_A(x')$ lo serán de las mismas ecuaciones de movimiento, expresadas en las nuevas variables y componentes del campo.

Distinguimos en lo sucesivo la variación debido al cambio de las variables x ($x \rightarrow x'$) y la variación local debida al cambio de forma de las funciones de campo:

$$\begin{aligned}x'^\alpha &= x^\alpha + \delta x^\alpha \text{ cambio en las variables,} \\ \psi'_A(x) &= \psi_A(x) + \bar{\delta}\psi_A(x) \text{ cambio local.}\end{aligned}\quad (7.44)$$

El cambio total de las componentes del campo a primer orden puede escribirse como:

$$\begin{aligned}\delta\psi_A(x) &= \psi'_A(x') - \psi_A(x) = \psi'_A(x') + \psi'_A(x) - \psi'_A(x) - \psi_A(x) \\ &= (\psi'_A(x') - \psi'_A(x)) + \bar{\delta}\psi_A(x) = (\psi_A(x') - \psi_A(x)) + \bar{\delta}\psi_A(x) \\ &= \psi_{A,\alpha}\delta x^\alpha + \bar{\delta}\psi_A(x), \\ \delta\psi_{A,\alpha} &= \frac{\partial \psi'_A(x')}{\partial x'^\alpha} - \psi_{A,\alpha}(x) = \frac{\partial(\psi_A + \bar{\delta}\psi_A + \psi_{A,B}\delta x^\beta)}{\partial x'^\alpha} - \psi_{A,\alpha}(x) \\ &= \psi_{A,\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} + \bar{\delta}\psi_{A,\alpha} + \psi_{A,\alpha\beta}\delta x^\beta + \psi_{A,\beta} \frac{\partial \delta x^\beta}{\partial x^\alpha} - \psi_{A,\alpha}.\end{aligned}\quad (7.45)$$

Introduciendo en la expresión anterior que:

$$\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x'^\alpha}(x'^\beta - \delta x^\beta) = \delta_\alpha^\beta - \frac{\partial \delta x^\beta}{\partial x^\alpha}, \quad (7.46)$$

llegamos finalmente a que,

$$\delta\psi_{A,\alpha} = \bar{\delta}\psi_{A,\alpha} + \psi_{A,\alpha\beta}\delta x^\beta. \quad (7.47)$$

Por otra parte,

$$d^n x' = d^n x \left| \det \left(\frac{\partial x'}{\partial x} \right) \right|. \quad (7.48)$$

Se deja como ejercicio para el lector el siguiente resultado (teniendo en cuenta el orden de aproximación que se está considerando):

$$\det \left(\frac{\partial x'}{\partial x} \right) = 1 + \frac{\partial \delta x^\alpha}{\partial x^\alpha} + \mathcal{O}((\delta x)^2). \quad (7.49)$$

Por tanto, sustituyendo en (7.41),

$$\begin{aligned} \Delta S &= \int d^n x \left(1 + \frac{\partial \delta x^\alpha}{\partial x^\alpha} \right) \mathcal{L} \left(x'; \psi'_A(x'), \frac{\partial \psi'_A(x')}{\partial x} \right) - \int d^n x \mathcal{L} \left(x; \psi_A(x), \frac{\partial \psi_A(x)}{\partial x} \right) \\ &= \int d^n x \left\{ \mathcal{L} \left(x'; \psi'_A(x'), \frac{\partial \psi'_A(x')}{\partial x'} \right) - \mathcal{L} \left(x; \psi_A(x), \frac{\partial \psi_A(x)}{\partial x} \right) \right\} \\ &+ \int d^n x \frac{\partial \delta x^\alpha}{\partial x^\alpha} \mathcal{L} \left(x; \psi_A, \frac{\psi_A}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (7.50)$$

Fijémonos en la primera integral:

$$\begin{aligned} &\mathcal{L} \left(x'; \psi'_A(x'), \frac{\partial \psi'_A(x')}{\partial x'} \right) - \mathcal{L} \left(x; \psi_A(x), \frac{\partial \psi_A(x)}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_A} \bar{\delta}\psi_A + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_A} \psi_{A,\alpha} \delta x^\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{A,\alpha}} \bar{\delta}\psi_{A,\alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{A,\alpha}} \psi_{A,\alpha\beta} \delta x^\beta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\alpha} \delta x^\alpha \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_A} \bar{\delta}\psi_A + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{A,\alpha}} \bar{\delta}\psi_{A,\alpha} + \frac{d\mathcal{L}}{dx^\alpha} \delta x^\alpha, \end{aligned} \quad (7.51)$$

donde la última derivada es total. Por lo que,

$$\begin{aligned} &\int d^n x \left\{ \mathcal{L} \left(x'; \psi'_A(x'), \frac{\partial \psi'_A(x')}{\partial x'} \right) - \mathcal{L} \left(x; \psi_A(x), \frac{\partial \psi_A(x)}{\partial x} \right) \right\} \\ &= \int d^n x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_A} \bar{\delta}\psi_A + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{A,\alpha}} \bar{\delta}\psi_{A,\alpha} \right\} + \int d^n x \frac{d\mathcal{L}}{dx^\alpha} \delta x^\alpha \\ &= \int d^n x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_A} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{A,\alpha}} \right\} \bar{\delta}\psi_A + \int d^n x \left(\frac{d}{dx^\alpha} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{A,\alpha}} \bar{\delta}\psi_A \right) + \frac{d\mathcal{L}}{dx^\alpha} \delta x^\alpha \right). \end{aligned} \quad (7.52)$$

Teniendo en cuenta que el primer término entre llaves es igual a $\delta S/\delta\psi_A$ e introduciendo la expresión anterior en (7.50),

$$\Delta S = \int d^n x \left\{ \frac{\delta S}{\delta \psi_A} \bar{\delta}\psi_A + \frac{d}{dx^\alpha} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{A,\alpha}} \bar{\delta}\psi_A + \mathcal{L} \delta x^\alpha \right] \right\} = \int d^n x \frac{d\lambda^\alpha(x; \psi_A)}{dx^\alpha}. \quad (7.53)$$

Es en la última igualdad donde se está suponiendo que la transformación (7.44) es una simetría. Para los ψ_A que representan el movimiento real del sistema se satisfacen las ecuaciones de Euler-Lagrange (7.37). Además, como la región de integración es arbitraria, se tiene la igualdad entre los integrandos,

$$\frac{d}{dx^\alpha} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{A,\alpha}} \bar{\delta} \psi_A + \mathcal{L} \delta x^\alpha \right] = \frac{d}{dx^\alpha} \lambda^\alpha(x; \psi) . \quad (7.54)$$

Si $\Delta S = 0$,

$$\frac{d}{dx^\alpha} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{A,\alpha}} \bar{\delta} \psi_A + \mathcal{L} \delta x^\alpha \right] = 0 . \quad (7.55)$$

En el caso en que $\Delta S \neq 0$ tenemos:

$$\frac{d}{dx^\alpha} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{A,\alpha}} \bar{\delta} \psi_A + \mathcal{L} \delta x^\alpha - \lambda^\alpha \right] = 0 . \quad (7.56)$$

Suponemos en lo que sigue de esta sección que $\Delta S = 0$, y que además la transformación es de la forma:

$$\begin{aligned} \delta x^\alpha &= (A_i^x)^\alpha \delta a^i \\ \delta \psi_A &= \left(A_i^\psi \right)_A \delta a^i , \quad i = 1, \dots, \gamma , \end{aligned} \quad (7.57)$$

donde los δa^i son parámetros infinitesimales que caracterizan a una transformación próxima a la identidad. Volviendo a (7.55), siguiendo la nueva notación y dado que $\bar{\delta} \psi_A = \delta \psi_A - \psi_{A,\alpha} \delta x^\alpha$, se sigue que:

$$\frac{d}{dx^\alpha} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{B,\alpha}} \left[\left(A_i^\psi \right)_B - \psi_{B,\lambda} (A_i^x)^\lambda \right] + \mathcal{L} (A_i^x)^\alpha \right] = 0 . \quad (7.58)$$

puesto que los δa^i son independientes y sus coeficientes se han de anular por separado. Las $i = 1, \dots, \gamma$ cantidades entre corchetes (salvo signo) se conocen como las *corrientes de Noether*, explícitamente:

$$\boxed{J_i^\nu = -\mathcal{L} (A_i^x)^\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{B,\nu}} \left(\psi_{B,\lambda} (A_i^x)^\lambda - \left(A_i^\psi \right)_B \right)} . \quad (7.59)$$

Vemos de (7.58) que cada una de las corrientes de Noether satisfacen una ecuación de continuidad,

$$\frac{\partial J_i^\nu}{\partial x^\nu} = \frac{\partial J_i^0}{\partial x^0} + \frac{\partial J_i^k}{\partial x^k} = 0 . \quad (7.60)$$

Como consecuencia hay $i = 1, \dots, \gamma$ cargas de Noether que vienen dadas por:

$$Q_i = \int dx J_i^0 , \quad (7.61)$$

donde la integral se realiza sobre toda la extensión espacial del sistema. En el caso en que éste sea periódico la integral se realiza típicamente sobre un periodo. La evolución temporal de la carga es:

$$\frac{dQ_i}{dt} = \int d\mathbf{x} \frac{\partial J_i^0}{\partial t} = - \int d\mathbf{x} \frac{\partial J_i^k}{\partial x^k} = - \int_{R \rightarrow \infty} d\sigma_k J_i^k = 0, \quad (7.62)$$

Donde se ha empleado el Teorema de Gauss para realizar el penúltimo paso y pasar de una integral de volumen a otra de superficie y hemos supuesto que el sistema se extiende por todo el espacio. La última integral se anula si los campos se desvanecen suficientemente rápido para $r \rightarrow \infty$. El mismo resultado se obtiene para sistemas periódicos en las variables espaciales, por ejemplo la cadena lineal, dado que la penúltima integral se reduce a la diferencia de una función en dos puntos separados por múltiplos enteros del período. En ambos casos tenemos γ cargas de Noether que son conservadas.

Notas

1. Si en lugar de integrar en (7.61) sobre todo el volumen se integra sólo sobre un cierto elemento V , definimos,

$$Q_i^V(t) = \int_V d\mathbf{x} J_i^0(x^0, \vec{x}). \quad (7.63)$$

Su evolución temporal, siguiendo los mismos pasos que en (7.62), viene dada por:

$$\frac{dQ_i^V}{dt} = \int_V d\mathbf{x} \frac{\partial J_i^0}{\partial x^0} = - \int_{\partial V} d\sigma_k J_i^k. \quad (7.64)$$

La relación anterior indica que J_i^k son las componentes de la corriente vectorial \mathbf{J}_i , tal que si su flujo a lo largo de la superficie que cierra V es positivo entonces hay pérdida de carga y si es negativo hay ganancia. En virtud de (7.63) a J_i^0 se le llama densidad de carga.

2. Las corrientes de Noether no están definidas de forma unívoca ya que siempre podemos añadirles la divergencia de cualquier tensor antisimétrico $f_i^{\mu\nu} = -f_i^{\nu\mu}$:

$$J_i^\nu \rightarrow J_i^{\prime\nu} = J_i^\nu + \frac{\partial f^{\nu\mu}}{\partial x^\mu}. \quad (7.65)$$

De lo que se sigue que las nuevas corrientes también tienen divergencia nula:

$$\frac{\partial J_i^{\prime\nu}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial J_i^\nu}{\partial x^\nu} + \frac{\partial^2 f^{\nu\mu}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} = \frac{\partial J_i^\nu}{\partial x^\nu} = 0. \quad (7.66)$$

Sin embargo, las cargas de Noether quedan invariantes por el cambio (7.65):

$$Q_i' = \int d\mathbf{x} J_i^{\prime 0} = \int d\mathbf{x} J_i^0 + \int d\mathbf{x} \frac{\partial f^{0k}}{\partial x^k} = \int d\mathbf{x} J_i^0 + \int_{R \rightarrow \infty} d\sigma_k f^{0k} = Q_i, \quad (7.67)$$

dado que la última integral se anula por las mismas razones que ya han sido expuestas anteriormente en relación con (7.62).

3. Si en el lado derecho de (7.53) se integra sobre toda la extensión espacial del sistema y se tiene en cuenta que se satisfacen las ecuaciones de Euler-Lagrange y se aplica el teorema de Gauss, eliminándose la integral de frontera resultante, entonces se obtiene:

$$\Delta S = - \int d^n x \frac{d}{dx^0} J_i^0 \delta a^i = -\delta a^i \int dx^0 \frac{dQ_i}{dx^0}, \quad (7.68)$$

donde también se ha empleado la definición de corriente y carga de Noether. Por lo tanto, la variación del *Lagrangiano* es:

$$\delta L = -\delta a^i \frac{dQ_i}{dt}. \quad (7.69)$$

Esta expresión es muy útil ya que nos permite identificar de forma directa el significado físico de las cargas de Noether así como fijar adecuadamente la normalización de las mismas. Baste para ello recordar los resultados del capítulo 2 en relación con la mecánica Lagrangiana de un sistema de partículas. Allí se mostró que los coeficientes que multiplican a los parámetros δa^i , que caracterizan la transformación infinitesimal, corresponden a las derivadas temporales de las componentes de importantes observables, como el momento lineal (δa^i son las componentes del vector del desplazamiento) o el momento angular (δa^i son el producto del ángulo de giro por las componentes del vector de giro), véanse las secciones 2.7 y 2.8, respectivamente. Análogamente, también se puede mostrar que la derivada de la energía es el coeficiente que multiplica a $\delta t \equiv \delta a$ para un desplazamiento temporal. Este mismo resultado, salvo por el signo menos, es el contenido de (7.69). Así, por ejemplo, cuando la simetría sea una rotación llamaremos momento angular a las cargas de Noether cuya derivada temporal vaya multiplicada por $-\delta\phi_i$ en (7.69), siendo $\delta\phi$ el ángulo de giro.

7.3.1. Teorema de Noether aplicado a una rotación global de la cadena lineal

Consideremos una rotación global de la cadena lineal cerrada. Se tiene:

$$x' = x + \delta a, \quad \delta a = R\delta\phi. \quad (7.70)$$

Dado que $u(x, t)$ es un escalar, entonces,

$$u'(x', t) = u(x, t) = u(x, t) + \bar{\delta}u + \frac{\partial u}{\partial x} \delta a \Rightarrow \bar{\delta}u = -\frac{\partial u}{\partial x} \delta a, \quad (7.71)$$

$$(A_i^x)^\alpha \equiv \delta_1^\alpha, \quad A_i^\psi \equiv 0. \quad (7.72)$$

Obviamente la densidad Lagrangiana del sistema dada en (7.33) es invariante bajo la transformación anterior, luego efectivamente es una simetría. La corriente de Noether resultante es:

$$J^\nu = -\mathcal{L}\delta_1^\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{,\nu}} u_{,x}. \quad (7.73)$$

De la forma explícita de la densidad Lagrangiana tenemos:

$$\begin{aligned} J^0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{,t}} u_{,x} = \rho \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} , \\ J^1 &= -\mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{,x}} u_{,x} = - \left(\frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right) . \end{aligned} \quad (7.74)$$

La carga de Noether conservada

$$Q = R \int_0^{2\pi R} dx J^0(x, t) = R \int_0^{2\pi R} dx \rho \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} , \quad (7.75)$$

es el momento angular del sistema alrededor del eje perpendicular al anillo. Se ha multiplicado la densidad de carga J^0 de (7.74) por R dado que la derivada del momento angular por $\delta\phi$, y no por δa , da lugar a δL , tal y como hemos discutido en la nota segunda en torno a (7.69).

Otra simetría del Lagrangiano (7.33), consistente también con la condición de periodicidad, es:

$$\begin{aligned} x' &= x , \\ u'(x', t) &= u(x, t) + R\delta\phi . \end{aligned} \quad (7.76)$$

En este caso la corriente de Noether resultante es,

$$J^\nu = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{,\nu}} R\delta\phi . \quad (7.77)$$

Explícitamente las componentes son:

$$J^0 = -\rho \frac{\partial u}{\partial t} R , \quad J^1 = \varepsilon \frac{\partial u}{\partial x} R . \quad (7.78)$$

Es interesante mencionar que la segunda transformación de simetría (7.76) es la propia del caso en que consideremos un sistema discreto de partículas a lo largo de la cadena lineal. Ya que entonces tenemos:

$$u'_i(t) = u_i(t) + R\delta\phi , \quad (7.79)$$

análogo a (7.76), siendo la corriente de Noether conservada para el caso discreto $\sum_i Rm\dot{u}_i$, que es la tercera componente del momento angular orbital y que coincide, salvo signo, con (7.78) cuando el sistema se torna denso.

La transformación para el caso de un sistema discreto de puntos materiales que conduce a (7.70) y (7.71) en el límite en que se torne denso es:

$$\begin{aligned} i' &= i + m , \\ u'_{i'} &= u_i , \end{aligned} \quad (7.80)$$

con m un número natural. En este caso:

$$\delta u_i = u'_{i'} - u_i = u_{i-m} - u_i . \quad (7.81)$$

En el límite en que el sistema se torna denso la expresión anterior se puede escribir simplemente como,

$$\delta u(x) = -\frac{\partial u}{\partial x} R \delta \phi, \quad (7.82)$$

y así la corriente de Noether resultante es:

$$Q = -\sum_i m \dot{u}_i \frac{\partial u_i}{\partial x} R \delta \phi \Rightarrow -\int_0^{2\pi R} dx \rho \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} R, \quad (7.83)$$

que salvo signo coincide con (7.75).

Comentamos algunas propiedades generales de las corrientes de Noether:

- Las corrientes que surgen de simetrías para las cuales $\delta x^\mu = 0$, se llaman *simetrías internas*, y por tanto $\delta \psi_A = \bar{\delta} \psi_A$.
- Suele ser habitual que,

$$\begin{aligned} (A_i^x)^\alpha &= (A_i^x)_\mu^\alpha x^\mu, \\ (A_i^\psi)_B &= (A_i^\psi)_B^C \psi_C. \end{aligned} \quad (7.84)$$

Se trata de transformaciones lineales y homogéneas en las variables y funciones de campo.

Para el ejemplo de la cadena lineal es más sencillo considerar la notación habitual de $(A_i^x)^\alpha$.

Algunas simetrías importantes, que podemos destacar son :

- Traslaciones:

$$\left. \begin{aligned} x'^\alpha &= x^\alpha + \delta a^\alpha \\ \psi'_A(x') &= \psi_A(x) \end{aligned} \right\} \text{Para cualquier campo.} \quad (7.85)$$

- Rotaciones:

- Campo escalar: $\phi'(x') = \phi(x)$,
- Campo vectorial: $V'_i(x') = R_{ij} V_j(x)$,
- Tensor cartesiano: $T'_{i_1 i_2 \dots i_n}(x') = R_{i_1 j_1} \dots R_{i_n j_n} T_{j_1 \dots j_n}(x)$, etc.

7.4. Tensor de energía-momento

Consideremos la traslación:

$$\delta x^\alpha = \delta a^\alpha, \quad x'^\alpha = x^\alpha + \delta a^\alpha, \quad \psi'_A(x') = \psi_A(x). \quad (7.86)$$

Los parámetros continuos que caracterizan la traslación son los a^α , por lo tanto, el índice i en (7.59) pasa a ser en este caso un índice espacio-temporal. El estudio de las traslaciones espacio-temporales son de especial importancia dado que todo sistema cerrado es invariante bajo tales transformaciones.

Comparando (7.86) con (7.57) es evidente que:

$$\begin{aligned} (A_i^x)^\alpha &\rightarrow (A_\beta^x)^\alpha = \delta_\beta^\alpha, \\ (A_i^\psi)_A &\rightarrow (A_\beta^\psi)_A = 0. \end{aligned} \quad (7.87)$$

Tenemos entonces a partir de (7.59) las siguientes corrientes de Noether,

$$\begin{aligned} J_i^\nu &\rightarrow J^\nu{}_\alpha = -\mathcal{L}\delta_\alpha^\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{A,\nu}} \psi_{A,\lambda} \delta_\alpha^\lambda \\ &= -\mathcal{L}\delta_\alpha^\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{A,\nu}} \psi_{A,\alpha}. \end{aligned} \quad (7.88)$$

En lugar de $J^\nu{}_\alpha$ se suelen representar por $T^\nu{}_\alpha$ que recibe el nombre de *tensor canónico de energía-momento*. Dicho tensor verifica:

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} T^\nu{}_\alpha = 0, \quad (7.89)$$

$$T^0{}_0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{A,t}} \psi_{A,t} - \mathcal{L} = \mathcal{H}, \quad (7.90)$$

con \mathcal{H} la densidad Hamiltoniana, en virtud de (7.69) e identificando $\delta a = \delta x^0$.

La notación del formalismo Lagrangiano para los sistemas continuos, que trata similarmente las variables espaciales y el tiempo, es del todo análoga a aquella del espacio de Minkowski y, por tanto, de la relatividad espacial. Así, definimos en esta sección y en la siguiente:

$$x^0 = ct, \quad T^{\nu\alpha} = g^{\alpha\mu} T^\nu{}_\mu. \quad (7.91)$$

Donde $g^{\alpha\beta}$ viene dado por:

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (7.92)$$

y que sólo emplearemos para subir o bajar índices en tensores. Las cargas $P^\mu = \int d\mathbf{x} T^{0\mu}$ son conservadas y de (7.90):

$$P^0 = \int d\mathbf{x} \mathcal{H} = H \quad \text{es el Hamiltoniano.} \quad (7.93)$$

Así T^{00} es la densidad de energía del sistema y P^0 es la energía total del sistema (para sistemas cerrados).

Como los P^μ son cantidades covariantes, y P^0 es la energía, entonces los P^k representan las componentes del momento total del sistema.

$$P^k = \int d\mathbf{x} T^{0k} , \quad (7.94)$$

donde T^{0k} es la densidad de la componente k -ésima del momento del sistema. Sea V una región espacial cerrada y calculemos:

$$\int_V d\mathbf{x} T^{0\alpha} , \quad (7.95)$$

entonces, teniendo en cuenta (7.89),

$$\frac{d}{dt} \int_V d\mathbf{x} T^{0\alpha} = \int_V d\mathbf{x} \frac{\partial T^{0\alpha}}{\partial t} = - \int_V d\mathbf{x} \frac{\partial T^{k\alpha}}{\partial x^k} = - \int_S ds_k T^{k\alpha} . \quad (7.96)$$

Así $T^{k\alpha}$ representa el trivector flujo de la componente α del cuadrivector de energía-momento.

Ejemplo: campo escalar relativista de masa m .

Supongamos la densidad Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{\hbar^2}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 c^2 \phi^2 = \frac{1}{2} \hbar^2 g^{\mu\alpha} \partial_\mu \phi \partial_\alpha \phi - \frac{1}{2} m^2 c^2 \phi^2 , \quad (7.97)$$

con $\phi(x)$ un campo escalar real. Notemos,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\alpha}} = \hbar^2 g^{\alpha\mu} \partial_\mu \phi . \quad (7.98)$$

Recordemos que a partir de (7.91) hemos hecho $x^0 = ct$, convenio habitual en relatividad.⁷ Aplicando (7.88) para calcular el tensor de energía-momento, se tiene:

$$T^\nu{}_\alpha = \left(-\frac{\hbar^2}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{m^2 c^2}{2} \phi^2 \right) \delta^\nu{}_\alpha + \hbar^2 g^{\nu\beta} \partial_\beta \phi \partial_\alpha \phi \Rightarrow$$

$$\boxed{T_{\nu\alpha} = \left(-\frac{\hbar^2}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{m^2 c^2}{2} \phi^2 \right) g_{\alpha\nu} + \hbar^2 \partial_\alpha \phi \partial_\nu \phi} \quad (7.99)$$

Y vemos que $T_{\nu\alpha}$ es simétrico, aunque no siempre es así para una densidad Lagrangiana arbitraria. Para la componente $\mathcal{H} = T^{00}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = T^{00} &= \hbar^2 \partial_0 \phi \partial_0 \phi - \frac{\hbar^2}{2} (\partial_0 \phi)^2 + \frac{\hbar^2}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 + \frac{m^2 c^2}{2} \phi^2 \\ &= \frac{\hbar^2}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial ct} \right)^2 + (\vec{\nabla} \phi)^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \phi^2 \right] . \end{aligned} \quad (7.100)$$

⁷En unidades naturales, típicas de Teoría Cuántica de Campos, $c = \hbar = 1$.

Por tanto:

$$H = \int d\mathbf{x} \frac{\hbar^2}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial ct} \right)^2 + (\vec{\nabla} \phi)^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \phi^2 \right\} . \quad (7.101)$$

Para el resto de densidades de carga:

$$T_{0k} = \hbar^2 \partial_k \phi \partial_0 \phi . \quad (7.102)$$

Para hallar el significado del parámetro m , ya obvio de (7.101), podemos considerar las ecuaciones de Euler-Lagrange a partir de la densidad Lagrangiana (7.97):

$$(\hbar^2 \partial_\mu \partial^\mu + m^2 c^2) \phi(x) = 0 . \quad (7.103)$$

Expresando $\phi(x)$ mediante una transformada de Fourier:

$$\phi(x) = \int \frac{dp}{(2\pi\hbar)^d} \varphi(p) e^{-ipx/\hbar} , \quad (7.104)$$

con d el número de dimensiones espaciales. Sustituyendo en (7.103) se tiene:

$$p^2 - m^2 c^2 = 0 . \quad (7.105)$$

Dado que $p = (E/c, \vec{p})$ llegamos a,

$$E(\mathbf{p})^2 = m^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2 \rightarrow p^0 = \pm \sqrt{m^2 c^2 + \mathbf{p}^2} = \pm E(\mathbf{p})/c , \quad (7.106)$$

que es la relación entre trimomento y energía de una partícula de masa m . Por lo tanto, en la integral (7.104) p^0 está fijado tal que $p^2 = m^2 c^2$ en virtud de (7.105). Este hecho da lugar a la delta de Dirac $\delta(p^2 - m^2 c^2)$, que es invariante Lorentz, como parte de la transformada de Fourier $\varphi(p)$. Teniendo en cuenta que,

$$\delta(p^2 - m^2 c^2) = \frac{\delta(p^0 - E(\mathbf{p})/c)}{2E(\mathbf{p})} + \frac{\delta(p^0 + E(\mathbf{p})/c)}{2E(\mathbf{p})} , \quad (7.107)$$

reescribimos (7.104) como:

$$\phi(x) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^d \sqrt{2E(\mathbf{p})}} (\varphi_1(\mathbf{p}) e^{-ipx/\hbar} + \varphi_2(\mathbf{p}) e^{ipx/\hbar}) , \quad (7.108)$$

con $p^0(\mathbf{p}) = +\sqrt{m^2 c^2 + \mathbf{p}^2}$. Imponiendo que $\phi(x)$ sea real se llega a que $\varphi_2(\mathbf{p})^* = \varphi_1(\mathbf{p})$, por lo tanto reescribimos (7.108) como:

$$\phi(x) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^d \sqrt{2E(\mathbf{p})}} (\varphi(\mathbf{p}) e^{-ipx/\hbar} + \varphi^*(\mathbf{p}) e^{ipx/\hbar}) , \quad (7.109)$$

eliminando los subíndices 1 y 2 en $\varphi(\mathbf{p})$. Por otra parte, si introducimos la expresión anterior para $\phi(x)$ en (7.101) obtenemos que la energía total es:

$$H = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^d} E(\mathbf{p}) |\varphi(\mathbf{p})|^2 . \quad (7.110)$$

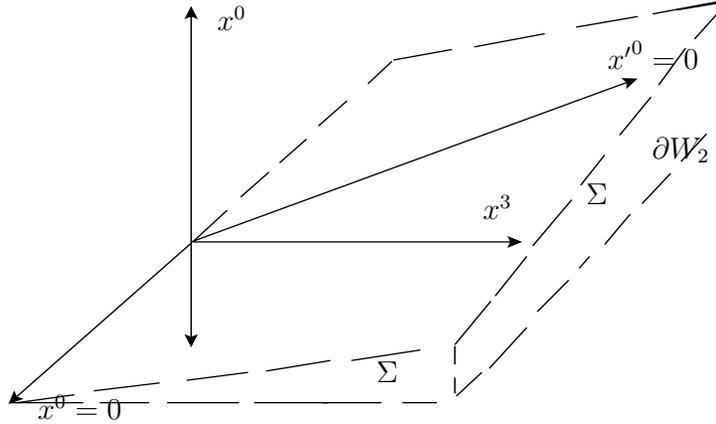


Figura 7.3: Planos $x_0 = 0$ y $x'_0 = 0$ unidos en los bordes por los planos verticales Σ . Recuerdese que $x'_0 = \gamma(x_0 - vx^3/c)$ y $x'_3 = \gamma(x^3 - vx^0/c)$ con $\gamma = \sqrt{1 - v^2/c^2}$.

Así, cada modo de oscilación caracterizado por un trimomento \mathbf{p} aporta $E(\mathbf{p})$ pesado por $|\varphi(\mathbf{p})|^2$ a la densidad de energía.⁸

Veamos que $P_\mu = \int T_{0\mu} d\mathbf{x}$, el cuadrimento de energía-momento, es efectivamente un vector bajo transformaciones de Lorentz.

Para la prueba consideremos una corriente vectorial S^μ que sea conservada, es decir, que satisfaga $\partial S^\mu / \partial x^\mu = 0$. Veamos que la carga $\int S^0 d\mathbf{x}$ no es sólo independiente de t sino que es invariante bajo transformaciones de Lorentz,

$$\int S^0 d\mathbf{x} = \int S'^0 d\mathbf{x}' . \tag{7.111}$$

Tomemos por conveniencia que la primera integral se calcula para $x^0 = 0$ según el observador \mathcal{O} y la segunda para $x'^0 = 0$, pero según el tiempo del observador \mathcal{O}' , donde \mathcal{O} y \mathcal{O}' son dos observadores inerciales. Dada la velocidad relativa \vec{v} entre ambos observadores, siempre se pueden elegir los ejes de coordenadas de ambos observadores tal que $\vec{v} = v_3 \hat{z}$.

Para la demostración considérese la figura (7.3). Sea la superficie ∂W_2 formada por $x^0 = 0$, $x^3 > 0$ y $x'^0 = 0$ junto con los planos verticales Σ y aplíquese el Teorema de Gauss a su interior W_2 ,

$$0 = \int_{W_2} \frac{\partial S^\mu}{\partial x^\mu} d^n x = \oint_{\partial W_2} S^\mu dB_\mu = \int_{x^0=0} S^\mu dB_\mu + \int_{x'^0=0} S^\mu dB_\mu + \int_\Sigma S^\mu dB_\mu . \tag{7.112}$$

Con B_μ el cuadvector superficie que para las distintas superficies viene dado por:

$$B_\mu = (-d\mathbf{x}, 0, 0, 0) \text{ en } x^0 = 0 , \tag{7.113}$$

donde $d\mathbf{x}$ es el elemento de volumen espacial y

$$B_\mu = \left(0, dx^0 d\vec{\Sigma} \right) , \tag{7.114}$$

⁸Recuérdese que en la normalización de caja para un sistema periódico de longitud L se tiene que $\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}} = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^d}$.

siendo $d\vec{\Sigma}$ un elemento de superficie espacial multiplicado por dx^0 dado que la superficie $\vec{\Sigma}$ tiene siempre una dimensión paralela al eje x^0 tal y como se muestra en la figura 7.3. Para la superficie $x'^0 = 0$, dado que $S^\mu B_\mu$ es invariante Lorentz, podemos escribir:

$$S^\mu dB_\mu = S'^\mu dB'_\mu \text{ y } dB'_\mu = (d\mathbf{x}', \vec{0}) . \quad (7.115)$$

Por lo tanto:

$$0 = - \int S^0 d\mathbf{x} + \int S'^0 d\mathbf{x}' + \int_\Sigma S^\mu dB_\mu . \quad (7.116)$$

Al hacer $\Sigma \rightarrow \infty$ la última integral tiende a cero. Procediendo de idéntico modo para la parte con $x^3 < 0$, se tiene finalmente:

$$\int_{x^0=0} S^0 d\mathbf{x} = \int_{x'^0=0} S'^0 d\mathbf{x}' . \quad (7.117)$$

Dado que ambas integrales son constantes en el tiempo, esta identidad se mantiene para todo x^0 y x'^0 . Apliquemos este resultado para concluir que efectivamente $P_\mu = \int T_{0\mu} d\mathbf{x}$ es un cuadrivector. Para ello tomemos un cuadrivector w^μ constante cualesquiera y tomemos $S^\nu = w^\mu T^\nu_\mu$. En virtud de (7.89), $\partial_\nu S^\nu = w^\mu \partial_\nu T^\nu_\mu = 0$. Aplicando (7.111),

$$\int S^0 d\mathbf{x} = \text{invariante} = \int w^\mu T_{0\mu} d\mathbf{x} = w^\mu P_\mu, \quad (7.118)$$

así que P_μ es un cuadrivector.

7.5. Tensor de momento angular

El grupo de Poincaré se compone de las traslaciones espacio-temporales, estudiadas en la sección 7.4 y que han dado lugar al tensor de energía-momento, y de las transformaciones de Lorentz (homogéneas), que van a dar lugar al tensor de momento angular.

7.5.1. Transformaciones de Lorentz

Las transformaciones lineales y homogéneas generales que dejan invariantes el cuadrado de los cuadrivectores en el espacio de Minkowski son las transformaciones de Lorentz:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu, \quad x'^2 = x^2 . \quad (7.119)$$

Esto implica que la métrica $g_{\mu\nu}$ queda invariante en una transformación de Lorentz,

$$g_{\alpha\beta} = \Lambda^\mu_\alpha g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\beta = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta g_{\mu\nu}, \quad (7.120)$$

ya que del cuadrado de un cuadrivector se tiene:

$$x'^2 = x'^\mu x'^\nu g_{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta x^\alpha x^\beta g_{\mu\nu} = x^\alpha x^\beta g_{\mu\nu} . \quad (7.121)$$

Seguimos la convención dada en (7.92) para la métrica $g_{\alpha\beta}$.

Calculemos la inversa de $\Lambda^\mu{}_\alpha$:

$$g^{\rho\alpha} g_{\alpha\beta} = \delta_\beta^\rho = g^{\rho\alpha} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta g_{\mu\nu} = (g^{\rho\alpha} g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha) \Lambda^\nu{}_\beta, \quad (7.122)$$

entonces:

$$\begin{aligned} (\Lambda^{-1})^\rho{}_\nu &= g^{\rho\alpha} g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha = \Lambda_\nu{}^\rho, \\ \Lambda_\nu{}^\rho \Lambda^\nu{}_\beta &= \delta_\beta^\rho. \end{aligned} \quad (7.123)$$

De forma explícita:

$$\begin{aligned} \Lambda = (\Lambda^\nu{}_\beta) &\equiv \begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 & \Lambda^0{}_1 & \Lambda^0{}_2 & \Lambda^0{}_3 \\ \Lambda^1{}_0 & \Lambda^1{}_1 & \Lambda^1{}_2 & \Lambda^1{}_3 \\ \Lambda^2{}_0 & \Lambda^2{}_1 & \Lambda^2{}_2 & \Lambda^2{}_3 \\ \Lambda^3{}_0 & \Lambda^3{}_1 & \Lambda^3{}_2 & \Lambda^3{}_3 \end{pmatrix}, \\ \Lambda^{-1} = (\Lambda_\nu{}^\rho) &\equiv \begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 & -\Lambda^1{}_0 & -\Lambda^2{}_0 & -\Lambda^3{}_0 \\ -\Lambda^0{}_1 & \Lambda^1{}_1 & \Lambda^2{}_1 & \Lambda^3{}_1 \\ -\Lambda^0{}_2 & \Lambda^1{}_2 & \Lambda^2{}_2 & \Lambda^3{}_2 \\ -\Lambda^0{}_3 & \Lambda^1{}_3 & \Lambda^2{}_3 & \Lambda^3{}_3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7.124)$$

De la relación fundamental (7.120), y dado que g es simétrica, se tienen 10 ecuaciones o condiciones que han de satisfacer las matrices $\Lambda^\mu{}_\alpha$ con lo que sólo 6 de sus elementos de matriz son independientes. Así pues, dichas matrices se caracterizan por 6 parámetros libres continuos.

7.5.2. Clasificación de las transformaciones de Lorentz

Tenemos que:

$$g_{\alpha\beta} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta g_{\mu\nu} \Rightarrow \det g = (\det \Lambda)^2 \det g \Rightarrow \det \Lambda = \pm 1. \quad (7.125)$$

En ambos casos $\det \Lambda \neq 0$ y Λ tiene inversa, como ya se ha demostrado también por construcción en (7.123). El que $|\det \Lambda| = 1$ implica la invariancia del elemento de volumen del espacio tetradimensional:

$$d^4 x' = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| d^4 x = |\det \Lambda| d^4 x = d^4 x. \quad (7.126)$$

Las transformaciones de Lorentz con $\det \Lambda = +1$ se llaman *propias* y aquéllas con $\det \Lambda = -1$ se llaman *impropias*.

De la relación básica $g_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta$, tomemos $\alpha = \beta = 0$:

$$\begin{aligned} g_{00} = 1 &= g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_0 \Lambda^\nu{}_0 = (\Lambda^0{}_0)^2 - (\Lambda^1{}_0)^2 - (\Lambda^2{}_0)^2 - (\Lambda^3{}_0)^2 \rightarrow \\ (\Lambda^0{}_0)^2 &= 1 + (\Lambda^1{}_0)^2 + (\Lambda^2{}_0)^2 + (\Lambda^3{}_0)^2 \geq 1. \end{aligned} \quad (7.127)$$

Por lo tanto, o bien $\Lambda^0{}_0 \geq 1$, son las llamadas transformaciones de Lorentz *ortocronas*, o $\Lambda^0{}_0 \leq -1$, son las llamadas transformaciones de Lorentz *no-ortocronas*. Si tenemos en cuenta este resultado, junto con que $\det \Lambda = \pm 1$, se llega a la clasificación de las transformaciones de Lorentz de la tabla 7.1.

	L_+^\uparrow	L_+^\downarrow	L_-^\uparrow	L_-^\downarrow
Λ_0^0	≥ 1	≤ -1	≥ 1	≤ -1
$\det \Lambda$	$+1$	$+1$	-1	-1

Cuadro 7.1: Clasificación de las transformaciones de Lorentz según que $\Lambda_0^0 \geq 1$ o ≤ -1 y de que $\det \Lambda = +1$ o -1 . En la primera fila se indica el símbolo que designa el subconjunto correspondiente de transformaciones de Lorentz.

Debido a los saltos discontinuos en Λ_0^0 y en $\det \Lambda$, las transformaciones de Lorentz de un subconjunto a otro de la tabla 7.1 no se pueden conectar de forma continua, variando los parámetros de que dependen las transformaciones de Lorentz, ya que se violaría continuidad. La identidad sólo está incluida en Λ_+^\uparrow , que es el subgrupo de las así llamadas transformaciones propias de Lorentz ortocronas y, por tanto, son las únicas que se pueden conectar continuamente con la identidad. El resto de subconjuntos en la tabla 7.1 no contiene la identidad y no son, por tanto, subgrupos. Todas las interacciones conocidas son invariantes bajo el subgrupo Λ_+^\uparrow de transformaciones de Lorentz.

Veamos a continuación que las transformaciones de Lorentz ortocronas no cambian el signo del tiempo para los cuadvectores de tipo temporal,

$$x^2 = x^0{}^2 - \vec{x}^2 > 0. \quad (7.128)$$

Siendo la componente temporal transformada

$$x'^0 = \Lambda_0^0 x^0 + \Lambda_0^1 x^1 + \Lambda_0^2 x^2 + \Lambda_0^3 x^3. \quad (7.129)$$

Apliquemos la desigualdad de Schwartz al producto escalar:

$$(\Lambda_0^1 x^1 + \Lambda_0^2 x^2 + \Lambda_0^3 x^3)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^3 \Lambda_0^k \right)^2 \left(\sum_{i=1}^3 x^i \right)^2 < (\Lambda_0^0)^2 (x^0)^2, \quad (7.130)$$

donde hemos tenido en cuenta que de (7.128) $x^0{}^2 > \vec{x}^2$ y también de (7.127) $(\Lambda_0^0)^2 > \sum_k (\Lambda_0^k)^2$. Así pues,

$$|\Lambda_0^0 x^0| > \left| \sum_{k=1}^3 \Lambda_0^k x^k \right|. \quad (7.131)$$

Teniendo pues en cuenta el resultado anterior en la expresión (7.129) para x'^0 se deduce, por tanto, que para $\Lambda_0^0 > 0$, x'^0 y x^0 tienen el mismo signo. Análogamente podemos deducir que para $\Lambda_0^0 < 0$, x'^0 y x^0 tienen distinto signo.

Ejemplos de transformaciones de Lorentz

- Rotaciones:

$$x'^0 = x^0, \quad (x^0)^2 - \vec{x}^2 = (x'^0)^2 - (\vec{x}')^2, \quad \vec{x}' = R\vec{x}, \quad (7.132)$$

con R una matriz ortonormal.

- *Boosts*: Relacionan dos observadores inerciales que se mueven con una velocidad relativa \vec{v} con ejes de coordenadas paralelos.

$$\begin{aligned} \vec{x}'_{\perp} &= \vec{x}_{\perp} , \\ x'_{\parallel} &= \gamma (x_{\parallel} - vt) , \\ t' &= \gamma \left(t - \frac{\vec{v}\vec{x}}{c^2} \right) , \end{aligned} \quad (7.133)$$

con $\gamma = \sqrt{1 - v^2/c^2}$. Estas transformaciones son parte del grupo de transformaciones propias y ortocronas de Lorentz L_+^{\uparrow} :

$$\Lambda^0_0 \geq 1 , \quad \det \Lambda = +1 . \quad (7.134)$$

7.5.3. Generadores infinitesimales

Consideremos las transformaciones de Lorentz (7.133) de L_+^{\uparrow} infinitesimales próximas a la identidad:

$$\begin{aligned} \vec{x}'_{\perp} &= \vec{x}_{\perp} , \quad \vec{x}'_{\parallel} = \gamma (\vec{x}_{\parallel} - \hat{u}v x^0/c) , \quad x'^0 = \gamma (x^0 - \vec{v}\vec{x}/c) , \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 1 + \mathcal{O}(v^2/c^2) , \quad \hat{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{\vec{v}}{v} . \end{aligned} \quad (7.135)$$

Por lo tanto, hasta orden v/c inclusive,

$$\begin{aligned} \vec{x}'_{\parallel} &= \vec{x}_{\parallel} - \hat{u}v x^0/c , \quad x'^0 = x^0 - v\hat{u}\vec{x}/c \rightarrow \\ \vec{x}' &= \hat{u}(\vec{x}'\hat{u}) + (\vec{x}' - (\vec{x}'\hat{u})\hat{u}) = \hat{u}(\vec{x}\hat{u} - vx^0/c) + (\vec{x} - (\vec{x}\hat{u})\hat{u}) \\ &= \vec{x} - \hat{u}v x^0/c = \vec{x} - \vec{v}x^0/c , \\ x'^0 &= x^0 - \vec{v}\vec{x}/c . \end{aligned} \quad (7.136)$$

En forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -v^1 & -v^2 & -v^3 \\ -v^1 & 1 & 0 & 0 \\ -v^2 & 0 & 1 & 0 \\ -v^3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad (7.137)$$

Por tanto:

$$\Lambda = \mathbb{I} - v^k A_k , \quad (7.138)$$

con A_1 , A_2 y A_3 los generadores de los boosts:

$$(A_1)^\nu_{\ \mu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad (A_2)^\nu_{\ \mu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad (A_3)^\nu_{\ \mu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \quad (7.139)$$

Si $\vec{v} \parallel \hat{i}$ tenemos un boost a lo largo del eje x ,

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \phi_1 & -\sinh \phi_1 & 0 & 0 \\ -\sinh \phi_1 & \cosh \phi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}. \quad (7.140)$$

donde:

$$\sinh \phi_1 = \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (7.141)$$

comparando con (7.133). Si hacemos consecutivamente dos de dichas transformaciones:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cosh \phi'_1 & -\sinh \phi'_1 & 0 & 0 \\ -\sinh \phi'_1 & \cosh \phi'_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \phi_1 & -\sinh \phi_1 & 0 & 0 \\ -\sinh \phi_1 & \cosh \phi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh(\phi'_1 + \phi_1) & -\sinh(\phi'_1 + \phi_1) & 0 & 0 \\ -\sinh(\phi'_1 + \phi_1) & \cosh(\phi'_1 + \phi_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (7.142)$$

y el parámetro ϕ es aditivo, siendo ésta la razón por la que se emplea para caracterizar los boosts en lugar de la velocidad. No obstante a nivel infinitesimal, $\mathcal{O}(v)$, $\phi = v$, y por eso para obtener los generadores no ha sido necesario introducirlo y a primer orden tenemos de (7.138):

$$\Lambda = \mathbb{I} - \delta\phi^k A_k. \quad (7.143)$$

Un boost finito se obtiene sin más que aplicando sucesivamente boosts infinitesimales,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\mathbb{I} - \frac{\phi^k}{N} A_k \right)^N = e^{-\phi^k A_k}. \quad (7.144)$$

Consideremos las rotaciones (7.132) infinitesimales para las que $x'^0 = x^0$ y

$$\vec{r}' = \vec{r} + \delta\theta (\hat{n} \times \vec{r}), \quad (7.145)$$

siendo \hat{n} el eje de giro y θ el ángulo de giro. En componentes:

$$\begin{aligned} r'^k &= r^k + \delta\theta \varepsilon^{klm} n^l r^m = r^k + (\delta\theta n^l) \varepsilon^{klm} r^m = \\ &= r^k + \varepsilon^{klm} \delta\theta^l r^m = (\delta^{km} + \varepsilon^{klm} \delta\theta^l) r^m, \end{aligned} \quad (7.146)$$

con $\delta\theta^l = \delta\theta n^l$. En lenguaje matricial,

$$R = \mathbb{I} + \delta\theta^l \tilde{A}_l, \quad (\tilde{A}_l)^k{}_m = -\varepsilon^{lkm}, \quad (7.147)$$

explícitamente,

$$(\tilde{A}_1)^\nu{}_\mu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\tilde{A}_2)^\nu{}_\mu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\tilde{A}_3)^\nu{}_\mu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.148)$$

Y por tanto:

$$\Lambda = \mathbb{I} + \delta\phi^l \hat{A}_l. \quad (7.149)$$

Para una rotación finita se tiene,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\mathbb{I} + \frac{\theta^l \tilde{A}_l}{N} \right)^N = e^{\theta^l \tilde{A}_l}. \quad (7.150)$$

Los boosts han dado lugar a tres generadores, y las rotaciones propias a otros tres. Dado que las transformaciones de Lorentz vienen dadas por seis parámetros ya hemos obtenido los seis generadores infinitesimales de L_+^\uparrow . Es conveniente emplear notación covariante que agrupe tanto a rotaciones como a boosts. Para ello definamos:

$$A_{ik} = -A_{ki} = \varepsilon_{ikj} \tilde{A}_j, \quad A_{i0} = -A_{0i} = A_i, \quad i, k, j = 1, 2, 3. \quad (7.151)$$

Se comprueba explícitamente que:

$$(A_{\alpha\beta})^\mu{}_\nu = \delta_\alpha^\mu g_{\nu\beta} - \delta_\beta^\mu g_{\nu\alpha} \quad (7.152)$$

Una forma más sencilla de recordar esta ecuación es:

$$(A_{\alpha\beta})_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha}. \quad (7.153)$$

Siendo directo comprobar que,

$$(A_{\alpha\beta})_{\mu\nu} = -(A_{\alpha\beta})_{\nu\mu}, \quad (A_{\alpha\beta})_{\mu\nu} = -(A_{\beta\alpha})_{\mu\nu}. \quad (7.154)$$

Empleando esta notación, tenemos que toda transformación propia y ortocrona de Lorentz infinitesimal se puede escribir en la forma:

$$x'^\mu = x^\mu + \delta a^{\sigma\rho} (A_{\sigma\rho})^\mu{}_\nu x^\nu, \quad (7.155)$$

y al ser $\delta a^{\sigma\rho}$ antisimétrico sólo hay seis parámetros independientes. Comparando explícitamente con las expresiones (7.143) y (7.149) para boosts y rotaciones, respectivamente, se deduce que:

$$\delta a^{k0} = -\delta\phi^k/2, \quad \delta a^{12} = \delta\theta^3/2, \quad \delta a^{23} = \delta\theta^1/2, \quad \delta a^{13} = -\delta\theta^2/2. \quad (7.156)$$

7.5.4. Conmutadores

Calculamos a continuación los conmutadores de los generadores infinitesimales de L_+^\uparrow . Éstos vienen definidos por:

$$[A_{\alpha\beta}, A_{\mu\nu}]_\sigma^\xi = (A_{\alpha\beta})_\rho^\xi (A_{\mu\nu})^\rho_\sigma - (A_{\mu\nu})_\rho^\xi (A_{\alpha\beta})^\rho_\sigma . \quad (7.157)$$

Mediante cálculo directo se comprueba que:

$$\begin{aligned} [A_i, A_j] &= -\varepsilon_{ijk} A_k , \\ [\tilde{A}_i, A_j] &= -\varepsilon_{ijk} A_k , \\ [\tilde{A}_i, \tilde{A}_j] &= \varepsilon_{ijk} \tilde{A}_k . \end{aligned} \quad (7.158)$$

7.5.5. Tensor de momento angular

Al ser seis el número de parámetros continuos que determinan una transformación de Lorentz deben existir seis corrientes de Noether que a partir de (7.59) y (7.155) podemos escribir como:

$$J^\nu_{\alpha\beta} = -\mathcal{L} (A_{\alpha\beta})^\nu_\mu x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{A,\nu}} \left(\psi_{A,\lambda} (A_{\alpha\beta})^\lambda_\mu x^\mu - (A_{\alpha\beta})^B_A \psi_B \right) . \quad (7.159)$$

Consideremos la contribución a $J^\nu_{\alpha\beta}$ debida al cambio en las coordenadas que es proporcional a

$$(A_{\alpha\beta})^\nu_\mu x^\mu = (\delta_\alpha^\nu g_{\beta\mu} - \delta_\beta^\nu g_{\alpha\mu}) x^\mu , \quad (7.160)$$

y llamemos a esa contribución $L^\nu_{\alpha\beta}$,

$$\begin{aligned} L^\nu_{\alpha\beta} &= -\mathcal{L} (\delta_\alpha^\nu g_{\beta\mu} - \delta_\beta^\nu g_{\alpha\mu}) x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{A,\nu}} \psi_{A,\lambda} (\delta_\alpha^\lambda g_{\beta\mu} - \delta_\beta^\lambda g_{\alpha\mu}) x^\mu \\ &= -\mathcal{L} \delta_\alpha^\nu x_\beta + \mathcal{L} \delta_\beta^\nu x_\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{A,\nu}} \psi_{A,\lambda} (\delta_\alpha^\lambda x_\beta - \delta_\beta^\lambda x_\alpha) = \\ &= -\mathcal{L} \delta_\alpha^\nu x_\beta + \mathcal{L} \delta_\beta^\nu x_\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{A,\nu}} \psi_{A,\alpha} x_\beta - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{A,\nu}} \psi_{A,\beta} x_\alpha = \\ &= x_\beta T^\nu_\alpha - x_\alpha T^\nu_\beta . \end{aligned} \quad (7.161)$$

Y además:

$$L^\nu_{\alpha\beta} = -L^\nu_{\beta\alpha} , \quad L^0_{\alpha\beta} = T^0_\alpha x_\beta - T^0_\beta x_\alpha . \quad (7.162)$$

Para α, β , índices espaciales, dado que T^0_k es la densidad de la componente k -ésima de momento lineal, entonces L^0_{ij} tiene la estructura de una densidad de momento angular orbital.

Además de $L^\nu_{\alpha\beta}$ se tiene la contribución debido al espín intrínseco del campo y que en (7.159) es proporcional a $(A_{\alpha\beta})^B_A$ y que designamos por $S^\nu_{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned} S^\nu_{\alpha\beta} &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{A,\nu}} (A_{\alpha\beta})^B_A \psi_B , \\ S^\nu_{\alpha\beta} &= -S^\nu_{\beta\alpha} . \end{aligned} \quad (7.163)$$

Esta fuente de momento angular es de naturaleza intrínseca al propio campo, como el espín del electrón. Este hecho no se observa en física clásica con partículas pero sí con campos.

- Campo escalar: $(A_{\alpha\beta})_A^B = 0 \rightarrow S^\nu_{\alpha\beta} = 0$.
- Campo vectorial: $(A_{\alpha\beta})_A^B \psi_B \rightarrow (A_{\alpha\beta})_\mu^\nu \psi_\nu$, etc.

También tenemos campos espinoriales, con espín semientero, pero que no veremos aquí.

La invariancia bajo las transformaciones de Lorentz implica la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} (L^\nu_{\alpha\beta} + S^\nu_{\alpha\beta}) = 0. \quad (7.164)$$

Calculemos por separado la divergencia de las corrientes de momento angular orbital,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\nu} L^{\nu\alpha\beta} &= \frac{\partial}{\partial x^\nu} [x^\beta T^{\nu\alpha} - x^\alpha T^{\nu\beta}] = \\ &= \delta_\nu^\beta T^{\nu\alpha} - \delta_\nu^\alpha T^{\nu\beta} = T^{\beta\alpha} - T^{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (7.165)$$

así, sólo cuando el tensor canónico de energía-momento sea simétrico $L^\nu_{\alpha\beta}$ satisface la ecuación de continuidad. Ya hemos visto que para el campo escalar $S^\nu_{\alpha\beta} = 0$, con lo que (7.165), junto con la conservación del momento angular total, muestra que el tensor canónico de energía y momento de un campo escalar es simétrico. Vimos un ejemplo de este resultado en (7.99). Otro importante resultado se sigue sustituyendo (7.165) en (7.164),

$$T_{\alpha\beta} - T_{\beta\alpha} = \frac{\partial S^\nu_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu}. \quad (7.166)$$

Este resultado muestra que en general el tensor de energía-momento no es simétrico para un espín arbitrario. No obstante, siempre le podemos sumar a $T^{\alpha\beta}$ la divergencia de un tensor antisimétrico:

$$T^{\nu\mu} \rightarrow T^{\nu\mu} + \frac{\partial}{\partial x^\alpha} f^{\mu[\nu\alpha]}, \quad (7.167)$$

y convertirlo en simétrico sin modificar el valor de las cargas de Noether, como ya vimos en la sección 7.4. El corchete en $f^{\mu[\nu\alpha]}$ indica que el par de índices que encierra es antisimétrico. El tensor simétrico resultante se le llama entonces el tensor métrico de energía-momento. Veamos haciendo uso de (7.166) que

$$f^{\mu[\nu\alpha]} = -\frac{1}{2} \left((A^{\nu\alpha})_A^B \psi_B \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{A,\mu}} - (A^{\nu\mu})_A^B \psi_B \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{A,\alpha}} + (A^{\alpha\mu})_A^B \psi_B \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{A,\nu}} \right), \quad (7.168)$$

es adecuado. El tensor (7.168) es obviamente antisimétrico bajo el intercambio de los índices $\nu \leftrightarrow \alpha$ como se requiere. Teniendo en cuenta (7.166) tenemos:

$$\tilde{T}^{\nu\mu} = T^{\nu\mu} + \frac{\partial f^{\mu[\nu\alpha]}}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{2} (T^{\nu\mu} + T^{\mu\nu}) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial S^{\mu\nu\alpha}}{\partial x^\alpha} - \frac{S^{\nu\alpha\mu}}{\partial x^\alpha} \right]. \quad (7.169)$$

Desarrollando los dos sumandos del término entre corchetes del lado de la derecha de la ecuación anterior, teniendo en cuenta la expresión explícita de $S^{\nu\alpha\beta}$ a partir de (7.163), es directo comprobar

que la contribución entre corchetes es simétrica bajo el intercambio de $\nu \leftrightarrow \mu$. Dado que el primer sumando es explícitamente simétrico se sigue que $\tilde{T}^{\nu\mu}$ es simétrico y, por tanto, un tensor métrico de energía-momento.

Las integrales:

$$L_{\alpha\beta} = \int d\mathbf{x} L^0_{\beta\alpha} , \quad S_{\alpha\beta} = \int d\mathbf{x} S^0_{\alpha\beta} , \quad (7.170)$$

son tensores de rango dos, como se puede demostrar de forma análoga a la demostración en relación con la figura 7.3, y se conocen, respectivamente, como el tensor de momento angular orbital y el tensor de momento angular intrínseco o espín del campo.

$$L_{\alpha\beta} = -L_{\beta\alpha} , \quad S_{\alpha\beta} = -S_{\beta\alpha} , \quad \frac{d}{dt} (L_{\alpha\beta} + S_{\alpha\beta}) = 0 , \quad (7.171)$$

dado que la suma de los tensores de momento angular orbital e intrínseco satisfacen la ecuación de continuidad (7.164). Al ser antisimétricos es conveniente agrupar las componentes espaciales de los tensores de momento angular en trivectores,

$$\begin{aligned} L_i &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ikl} L_{kl} , \quad \text{vector de momento angular orbital,} \\ S_i &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ikl} S_{kl} , \quad \text{vector de espín,} \end{aligned} \quad (7.172)$$

siendo $J_i = L_i + S_i$ las componentes cartesianas del vector de momento angular total y que son constantes de movimiento.

7.6. Simetrías internas

Con el nombre de simetrías internas nos referimos a transformaciones de simetría para las que las variables espacio temporales quedan invariantes y, por tanto, $(A_i^x)^\alpha = 0$. Estas simetrías juegan un papel indispensable en las teorías actuales de las interacciones fundamentales (electrodébiles y fuertes).

A modo de ejemplo consideremos de nuevo la densidad Lagrangiana de un campo escalar de masa m :

$$\mathcal{L}(\phi, \frac{\partial\phi}{\partial x}) = \hbar^2 \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - m^2 c^2 \phi \phi^* , \quad (7.173)$$

pero en este caso el campo $\phi(x)$ es complejo y no real como en (7.97). Recordemos que $\partial_0 = \partial/\partial ct$.

Considérese la transformación

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{i\alpha} \phi , \quad x' = x , \quad (7.174)$$

se tiene:

$$\mathcal{L}(\phi', \frac{\partial\phi'}{\partial x'}) = \hbar^2 \partial_\mu \phi' \partial^\mu \phi'^* - m^2 c^2 \phi' \phi'^* = \hbar^2 \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - m^2 c^2 \phi \phi^* = \mathcal{L}(\phi, \frac{\partial\phi}{\partial x}) , \quad (7.175)$$

luego $\Delta S = 0$ y se trata de una simetría. Por otra parte de (7.174),

$$\begin{aligned} (A_i^x)^\nu &= 0, \\ \delta\phi &= i\delta\alpha\phi \rightarrow A_\phi^\psi = i\phi, \quad \delta\phi^* = -i\delta\alpha\phi^* \rightarrow A_{\phi^*}^\psi = -i\phi^*. \end{aligned} \quad (7.176)$$

La correspondiente corriente de Noether (7.59) viene entonces dada por:

$$\begin{aligned} J^\nu &= -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_{B,\nu}} (A^\psi)_B = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\nu}} i\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\nu}^*} i\phi^* \\ &= -\hbar^2 (\partial^\nu\phi^*) i\phi + \hbar^2 (\partial^\nu\phi) i\phi^* = i\hbar^2 (\phi^* \partial^\nu\phi - \phi \partial^\nu\phi^*). \end{aligned} \quad (7.177)$$

La carga conservada de Noether es,

$$Q = i\hbar^2 \int d\mathbf{x} (\phi^* \partial^0\phi - \phi \partial^0\phi^*). \quad (7.178)$$

Tal que Qe es proporcional a la densidad de carga eléctrica del campo. El factor de proporcionalidad se puede fijar estudiando la expresión anterior en el espacio de momentos, es decir, mediante el empleo de la transformada de Fourier del campo $\phi(x)$ de modo similar a como se hizo en el ejemplo del campo escalar real de masa m . Nótese que si $\phi(x)$ fuese real entonces $Q = 0$. El trivector corriente es,

$$\vec{J} = -i\hbar^2 (\phi^* \vec{\nabla}\phi - \phi \vec{\nabla}\phi^*), \quad (7.179)$$

cuyo flujo a través de una superficie cerrada es la variación temporal de la carga encerrada en dicha superficie.

Una generalización de la transformación (7.174) es cuando α pasa a ser una función de x , es decir, se tiene $\alpha = \alpha(x)$. Veamos que esta transformación no es una simetría para la densidad Lagrangiana (7.173).

$$\mathcal{L}(\phi', \frac{\partial\phi'}{\partial x}) = \hbar^2 (\partial_\mu + i\frac{\partial\alpha(x)}{\partial x^\mu})\phi(x) (\partial^\mu - i\frac{\partial\alpha(x)}{\partial x^\mu})\phi(x) - m^2 c^2 \phi\phi^* \neq \mathcal{L}(\phi, \frac{\partial\phi}{\partial x}) + \frac{\partial\lambda^\beta}{\partial x^\beta}. \quad (7.180)$$

Sin embargo, si consideramos la densidad Lagrangiana,

$$\mathcal{L}(\phi, \frac{\partial\phi}{\partial x}, A_\mu) = \hbar^2 (\partial_\mu - iA_\mu)\phi (\partial^\mu + iA_\mu)\phi^* - m^2 c^2 \phi\phi^*, \quad (7.181)$$

donde se ha añadido el campo vectorial y real $A_\mu(x)$, entonces la transformación:

$$x' = x, \quad \phi'(x) = e^{i\alpha(x)}\phi(x), \quad A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\alpha(x), \quad (7.182)$$

sí que es una simetría de la densidad Lagrangiana (7.181) como se comprueba de forma directa.

A nivel general, las transformaciones continuas de los campos para las que los parámetros que fijan dichas transformaciones dependan de x se denominan transformaciones de gauge. Por otra parte, los campos vectoriales que se introducen para imponer que la densidad Lagrangiana sea invariante bajo una transformación gauge se denominan campos de gauge. En el ejemplo que estamos considerando la transformación (7.182) es un simple cambio de fase local del campo $\phi(x)$ y el campo vectorial de gauge A_μ representa el campo electromagnético. Para el caso de las interacciones fuertes se tienen ocho campos gauge y cuatro para las interacciones electrodébiles.

7.7. Formulación Hamiltoniana

Comencemos de nuevo considerando el simple ejemplo de la cadena en la forma de anillo tomado en la sección (7.1).

Planteemos el formalismo Hamiltoniano para el sistema de N partículas y luego tomemos el límite $N \rightarrow \infty$. Las coordenadas y momentos vienen dados por:

$$q_i = u_i, \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_i}, \quad H(p, q) = \sum_{i=1}^N p_i \dot{q}_i - L, \quad (7.183)$$

con las ecuaciones de Hamilton,

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (7.184)$$

A partir del Lagrangiano (7.3) se tiene,

$$p_i = \frac{\partial}{\partial \dot{u}_i} \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} m \dot{u}_j^2 = a \frac{\partial}{\partial \dot{u}_i} \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} \rho \dot{u}_j^2 = a \rho \dot{u}_i \xrightarrow{N \rightarrow \infty} dx \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial u / \partial t)}, \quad dx = a, \quad (7.185)$$

con \mathcal{L} dada en (7.33). Por lo tanto,

$$p_i = dx \rho \frac{\partial u}{\partial t} \equiv dp(x) = dx \pi(x), \quad (7.186)$$

donde $\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}}$ es la densidad de momento canónico. Para el Hamiltoniano se tiene en el límite de sistema continuo,

$$H = \sum_{i=1}^N p_i \dot{q}_i - L \rightarrow \int dx \pi \frac{\partial u}{\partial t} - \int dx \mathcal{L} = \int dx \left[\pi \frac{\partial u}{\partial t} - \mathcal{L} \right]. \quad (7.187)$$

Y la densidad Hamiltoniana \mathcal{H} viene dada por:

$$\mathcal{H} = \pi \frac{\partial u}{\partial t} - \mathcal{L}. \quad (7.188)$$

Como $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \pi$ fácilmente podemos eliminar la derivada temporal de u en la densidad Hamiltoniana resultando,

$$\mathcal{H} = \frac{1}{\rho} \pi^2(x) - \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\pi}{\rho} \right)^2 + \frac{1}{2} \varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{\pi^2(x)}{\rho} + \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2. \quad (7.189)$$

No hay dependencia en u sino sólo en π y $\partial u / \partial x$.

7.7.1. Generalización. Ecuaciones canónicas

Para obtener las ecuaciones canónicas planteamos el problema general de realizar una transformación de Legendre tal y como se hizo en la dinámica de un sistema de partículas.

Sea la densidad Lagrangiana $\mathcal{L} = \mathcal{L} \left(x; \psi_A, \frac{\partial \psi_A}{\partial t}, \nabla \psi_A \right)$, y consideremos la transformación,

$$\psi_A, \frac{\partial \psi_A}{\partial t}, \nabla \psi_A \rightarrow \psi_A, \pi_A, \nabla \psi_A . \quad (7.190)$$

La densidad de momento canónico viene dada por:

$$\pi_A = \frac{\partial \mathcal{L} \left(x; \psi_A, \frac{\partial \psi_A}{\partial t}, \nabla \psi_A \right)}{\partial \psi_{A,t}} , \quad (7.191)$$

y de aquí se puede expresar $\psi_{A,t}$ como función de $\pi_A, \psi_A, \nabla \psi_A$. Para que esta transformación sea posible, el Hessiano:

$$\det \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \psi_{A,t} \partial \psi_{B,t}} \right) \neq 0 . \quad (7.192)$$

Entonces:

$$\mathcal{H} \left(x; \psi_A, \pi_A, \nabla \psi_A \right) = \sum_{B=1}^f \pi_B \frac{\partial \psi_B}{\partial t} - \widehat{\mathcal{L}} \left(x; \psi_A, \pi_A, \nabla \psi_A \right) , \quad (7.193)$$

que de hecho coincide con T^{00} dada en (7.90). Obsérvese que la densidad Lagrangiana ha variado de argumentos y de ahí que se haya incluido el gorro sobre \mathcal{L} . El Hamiltoniano viene dado entonces por:

$$H = \int dx \mathcal{H} \left(x; \psi_A, \pi_A, \nabla \psi_A \right) . \quad (7.194)$$

Hallemos ahora las ecuaciones canónicas a través de la variación de las densidades de los momentos y la variación de las componentes del campo. En ambos casos la variación se anula sobre la frontera δR . Tenemos:

- $\pi_A \rightarrow \pi_A + \delta \pi_A$,

$$\delta H = \int dx \left\{ \sum_B \frac{\partial \psi_B}{\partial t} \delta \pi_B + \sum_{B,C} \pi_B \frac{\partial \psi_{B,t}}{\partial \pi_C} \delta \pi_C - \sum_{B,C} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{B,t}} \frac{\partial \psi_{B,t}}{\partial \pi_C} \delta \pi_C \right\} . \quad (7.195)$$

Los términos segundo y tercero del lado de la derecha se cancelan mutuamente dada la definición de densidad de momento canónico (7.191). Entonces,

$$\boxed{\frac{\delta H}{\delta \pi_A} = \frac{\partial \psi_A}{\partial t}} \quad (7.196)$$

que es el primer conjunto de ecuaciones canónicas.

- $\psi_A \rightarrow \psi + \delta\psi_A$,

$$\begin{aligned} \delta H = \int d\mathbf{x} \left\{ \pi_B \frac{\partial \psi_{B,t}}{\partial \psi_C} \delta\psi_C + \pi_B \frac{\partial \psi_{B,t}}{\partial \psi_{C,k}} \delta\psi_{C,k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_C} \delta\psi_C \right. \\ \left. - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{B,t}} \frac{\partial \psi_{B,t}}{\partial \psi_C} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{B,t}} \frac{\partial \psi_{B,t}}{\partial \psi_{C,k}} \delta\psi_{C,k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{C,k}} \delta\psi_{C,k} \right\}. \end{aligned} \quad (7.197)$$

En la expresión anterior hemos empleado el convenio de suma sobre índices repetidos que mantendremos a lo largo de este capítulo. A partir de (7.191) se deduce de forma directa que los términos primero y cuarto, por una parte, y el segundo y el quinto, por otra, se cancelan en parejas. Así,

$$\delta H = \int d\mathbf{x} \left\{ -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_C} \delta\psi_C - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{C,k}} \delta\psi_{C,k} \right\} = \quad (7.198)$$

$$= - \int d\mathbf{x} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_C} - \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{C,k}} \right) \right\} \delta\psi_C, \quad (7.199)$$

donde se ha eliminado la integral de superficie tras integrar por partes. De este modo,

$$\frac{\delta H}{\delta \psi_C} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_C} + \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{C,k}} \right). \quad (7.200)$$

Si tenemos en cuenta las ecuaciones de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_C} = \frac{\partial \pi_C}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{C,k}} \right) \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_C} - \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{C,k}} \right) = \frac{\partial \pi_C}{\partial t}. \quad (7.201)$$

Introduciendo este resultado (7.200) se deduce que,

$$\boxed{\frac{\delta H}{\delta \psi_C} = -\frac{\partial \pi_C}{\partial t}} \quad (7.202)$$

que es el segundo conjunto de ecuaciones canónicas.

Vemos la gran analogía entre (7.196) y (7.202) con las ecuaciones canónicas en mecánica de un sistema de partículas, intercambiando derivadas parciales del Hamiltoniano por derivadas funcionales.

Mientras que las ecuaciones de Lagrange son ecuaciones diferenciales de segundo orden tanto en t como en \vec{x} , las ecuaciones canónicas son de primer orden en t , así que su número se dobla. El tiempo juega por tanto un papel privilegiado en la dinámica Hamiltoniana, mientras que en la mecánica Lagrangiana se trata de forma análoga que a las coordenadas espaciales, lo cual hace que la generalización relativista de la mecánica Lagrangiana expuesta en la sección 7.2 sea directa. Sin embargo, el proceso de cuantización canónica en mecánica cuántica para campos, que exige de la identificación de variables canónicamente conjugadas, se realiza dentro de la formulación Hamiltoniana.

Ejemplo

En el ejemplo anterior de la cadena lineal en forma de anillo, la densidad Hamiltoniana está dada en (7.189), con lo que el Hamiltoniano viene dado por:

$$H = \int dx \left\{ \frac{1}{2\rho} \pi^2(x) + \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\}. \quad (7.203)$$

Así las ecuaciones canónicas (7.196) y (7.202) son,

$$\frac{\delta H}{\delta \pi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi} = \frac{1}{\rho} \pi = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{\delta H}{\delta u} = -\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial \pi}{\partial t}. \quad (7.204)$$

Reexpresando $\pi = \rho \frac{\partial u}{\partial t}$ queda:

$$\boxed{\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0}$$

7.8. Dependencia temporal de las variables dinámicas

Sea F un funcional de ψ_A y π_A ,

$$F = \int d\mathbf{x} \mathcal{F}(\psi_A, \pi_A, \nabla \psi_A, \vec{x}, t). \quad (7.205)$$

Queremos averiguar su evolución temporal. Su derivada temporal viene dada por:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \int d\mathbf{x} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \int d\mathbf{x} \left\{ \frac{\delta F}{\delta \psi_B} \frac{\partial \psi_B}{\partial t} + \frac{\delta F}{\delta \pi_B} \frac{\partial \pi_B}{\partial t} \right\} \\ &= \int d\mathbf{x} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \int d\mathbf{x} \left\{ \frac{\delta F}{\delta \psi_B} \frac{\delta H}{\delta \pi_B} - \frac{\delta F}{\delta \pi_B} \frac{\delta H}{\delta \psi_B} \right\} \\ &= \int d\mathbf{x} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + [F, H], \end{aligned} \quad (7.206)$$

$$\boxed{\frac{dF}{dt} = [F, H] + \int d\mathbf{x} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}} \quad (7.207)$$

Donde $[F, H]$ es el paréntesis de Poisson de F y H . La expresión anterior es la generalización del resultado (3.49) de la mecánica discreta al caso continuo. Para cualquier par de variables dinámicas R y S del tipo (7.205) su paréntesis de Poisson se define como:

$$[R, S] = \int d\mathbf{x} \left\{ \frac{\delta R}{\delta \psi_A} \frac{\delta S}{\delta \pi_A} - \frac{\delta R}{\delta \pi_A} \frac{\delta S}{\delta \psi_A} \right\}. \quad (7.208)$$

Calculemos los paréntesis de Poisson fundamentales a tiempos iguales:

$$[\psi_A(x^0, \vec{y}), \psi_B(x^0, \vec{z})], \quad [\pi_A(x^0, \vec{y}), \pi_B(x^0, \vec{z})], \quad [\psi_A(x^0, \vec{y}), \pi_B(x^0, \vec{z})]. \quad (7.209)$$

Dado que,

$$\begin{aligned}\psi_A(x^0, \vec{y}) &= \int dx^3 \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \psi_A(x^0, \vec{x}) , \\ \pi_A(x^0, \vec{z}) &= \int dx^3 \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{z}) \pi_A(x^0, \vec{x}) .\end{aligned}\tag{7.210}$$

Es directo comprobar:

$$\frac{\delta\psi_A(\vec{y})}{\delta\psi_C(\vec{w})} = \delta_{AC}\delta^{(3)}(\vec{w} - \vec{y}) , \quad \frac{\delta\psi_A(\vec{y})}{\delta\pi_C} = 0 ,\tag{7.211}$$

$$\frac{\delta\pi_B(\vec{z})}{\delta\psi_C(\vec{w})} = 0 , \quad \frac{\delta\pi_B(\vec{z})}{\delta\pi_C(\vec{w})} = \delta_{BC}\delta^{(3)}(\vec{w} - \vec{z}) .\tag{7.212}$$

Por tanto los paréntesis de Poisson fundamentales serán:

$$\begin{aligned}[\psi_A(x^0, \vec{y}), \pi_B(x^0, \vec{z})] &= \int \delta_{AC}\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \delta_{BC}\delta^{(3)}(\vec{w} - \vec{z}) d^3w = \\ &= \delta_{AB}\delta^{(3)}(\vec{y} - \vec{z}) .\end{aligned}\tag{7.213}$$

En lugar de una delta de Kronecker tenemos una delta de Dirac para los índices continuos. Análogamente se puede demostrar:

$$[\psi_A(x^0, \vec{y}), \psi_B(x^0, \vec{z})] = [\pi_A(x^0, \vec{y}), \pi_B(x^0, \vec{z})] = 0\tag{7.214}$$

Es directo comprobar que los paréntesis de Poisson (7.208) son lineales, antisimétricos, verifican la propiedad asociativa y la identidad de Jacobi.

Ejemplo

Consideremos de nuevo el ejemplo de la cadena lineal de la sección 7.1. Sea,

$$\mathcal{F} = \rho \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} = \pi \frac{\partial u}{\partial x} ,\tag{7.215}$$

teniendo en cuenta la expresión para la densidad de momento canónico (7.186). Su evolución dinámica (7.207) es:

$$\frac{dF}{dt} = [F, H] ,\tag{7.216}$$

dado que F no depende explícitamente de t . Puesto que:

$$\begin{aligned}\frac{\delta F}{\delta \pi} &= \frac{\partial u}{\partial x} , \quad \frac{\delta F}{\delta u} = -\frac{\partial \pi}{\partial x} , \\ \frac{\delta H}{\delta \pi} &= \frac{1}{\rho} \pi , \quad \frac{\delta H}{\delta u} = -\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} ,\end{aligned}\tag{7.217}$$

se sigue de (7.208) que,

$$\begin{aligned}
 [F, H] &= \int \left\{ -\frac{\partial \pi}{\partial x} \frac{1}{\rho} \pi + \frac{\partial u}{\partial x} \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\} dx = \\
 &= \int dx \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ -\frac{1}{\rho} \pi^2 + \varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\} = 0,
 \end{aligned}
 \tag{7.218}$$

la última integral es nula ya que el sistema es periódico en x con período $2\pi R$. Así, F es una constante de movimiento. De hecho F no es más que la carga de Noether Q de (7.75) dividida por R , con lo que hemos demostrado explícitamente que en efecto es una constante de movimiento.

Se deja como ejercicio para el lector demostrar de forma explícita la relación:

$$[R, ST] = [R, S]T + S[R, T], \tag{7.219}$$

con R, S funcionales del tipo (7.205).

Bibliografía

- [1] Jorge V. José y Eugene Saletan, *Classical Dynamics: A Contemporary Approach*. Cambridge University Press.
- [2] Cornelius Lanczos, *The Variational Principles of Mechanics*. Dover Publications, Inc.
- [3] L.D. Landau y E.M. Lifshitz, *Curso de Física Teórica, Vol. 1: Mecánica*. Editorial Reverté.
- [4] A. Sommerfeld, *Lectures on Theoretical Physics, Vol. 1: Mechanics*. Academic Press.
- [5] H. Goldstein, C. Poole y J. Safko, *Classical Mechanics, Third Edition*. Addison Wesley.
- [6] H. Goldstein, *Mecánica Clásica*. Editorial Reverté.
- [7] V.I. Arnold, *Métodos Matemáticos de la Mecánica Clásica*. Editorial Paraninfo.
- [8] E.T. Whittaker, *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*. Cambridge University Press.
- [9] A. Sokolov, I. Ternov, V. Zikovskii y A. Borisov, *Quantum Electrodynamics*, Ed. MIR. La primera mitad del libro trata sobre teoría clásica de campos.
- [10] M. A. Martín, M. Morán y M. Reyes, *Iniciación al Caos*. Editorial Síntesis.