10.– *En el espacio vectorial real de las matrices 2×2 con elementos reales, $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, se consideran los subespacios*

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}, \quad x + y - 2z = t \right\}$$

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 3a+b & -b \\ a & a+b \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$W = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(a) *Hallar la dimensión y una base de U, V y W.*

El subespacio vectorial U está definido por una única ecuación implícita. Por tanto tiene dimensión:

$$dim(U) = dim(\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})) - 1 = 4 - 1 = 3.$$

Para hallar una base escribimos las coordenadas respecto la base canónica de 3 vectores independientes que cumplan la ecuación $x + y - 2z = t$ que define U:

$$(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, -2).$$

Por tanto la base será:

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Todo vector de V se escribe como combinación lineal de dos matrices:

$$\begin{pmatrix} 3a+b & -b \\ a & a+b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Teniendo en cuenta que ambas matrices son independientes, V tiene dimensión 2 y una base es:

$$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Finalmente W ya viene definido como el subespacio generado por un sólo vector no nulo. Por tanto su dimensión es 1 y la base está formado por la matriz dada que lo genera.

(b) *Hallar, en la base canónica, ecuaciones paramétricas y cartesianas de $U \cap V$*

Todo vector de V, en coordenadas respecto a la base canónica es de la forma:

$$(x, y, z, t) = (3a + b, -b, a, a + b).$$

Para intersecar con U imponemos que este vector cumpla la ecuación implícita que define U:

$$x + y - 2z = t \iff 3a + b - b - 2a = a + b \iff b = 0.$$

Deducimos que todo vector de la intersección es de la forma:

$$(x, y, z, t) = (3a, 0, a, a).$$

Por tanto las ecuaciones paramétricas de la intersección son:

$$\begin{aligned} x &= 3a \\ y &= 0 \\ z &= a \\ t &= a \end{aligned}$$

Las implícitas las obtenemos eliminando el parámetro a:

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ x - 3z &= 0 \\ z - t &= 0 \end{aligned}$$

(c) *Hallar, en la base*

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

las ecuaciones paramétricas y cartesianas de $V + W$

Tenemos una base de V y otra de W. En la base canónica sabemos que $V + W$ estará generado por los vectores de una y otra:

$$V + W = \mathcal{L}\{(3,0,1,1), (1,-1,0,1), (1,1,0,1))\}$$

Veamos si son independientes:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{23}(-1)H_{13}(-3)} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_2(-1/2)} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{H_{12}(3)H_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{13}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Por tanto la suma está generada por los vectores independientes:

$$V + W = \mathcal{L}\{(1,0,0,1), (0,1,0,0), (0,0,1,-2)\}.$$

Para cambiarlos de base utilizamos la matriz de paso:

$$M_{BC} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \iff M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Hacemos el cambio de base:

$$(1,0,0,1)M_{CB} = (1,-1,1,0), \quad (0,1,0,0)M_{CB} = (-1,1,0,0), \quad (0,0,1,-2)M_{CB} = (0,2,-3,1).$$

Por tanto las ecuaciones paramétricas respecto a la base B son:

$$\begin{aligned} x' &= a - b \\ y' &= -a + b + 2c \\ z' &= a - 3c \\ t' &= c \end{aligned}$$

Para hallar la implícita eliminamos los parámetros. Queda:

$$x' + y' - 2t' = 0.$$

12.– *Encontrar la (única) respuesta correcta, de entre las indicadas, a las siguientes cuestiones:*

(a) *Sean U y V subespacios vectoriales de un espacio vectorial E de dimensión finita.*

◯ *Si $dim(U) + dim(V) = dim(U + V)$, entonces U y V son suplementarios.*

FALSO. Para que sean suplementarios además su suma tiene que ser todo el espacio E. Por ejemplo en $\mathbb{R}^3$, si $U = \mathcal{L}\{(1,0,0)\}$, $V = \mathcal{L}\{(0,1,0)\}$, entonces $U + V = \mathcal{L}\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ y $dim(U) + dim(V) = dim(U + V)$ pero no son suplementarios porque $U + V \neq \mathbb{R}^3$.

◯ *Si $dim(U) = dim(V) = dim(U \cap V)$, entonces $U = V$.*

VERDADERO. Siempre se cumple que $U \cap V \subset V$ y $U \cap V \subset U$. Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} U \cap V \subset U \\ dim(U) = dim(U \cap V) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad U = U \cap V, \qquad \left.\begin{array}{l} U \cap V \subset V \\ dim(V) = dim(U \cap V) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad V = U \cap V$$

Por tanto:

$$U = U \cap V = V.$$

◯ *Si $dim(U + V) = dim(E)$, entonces U y V son suplementarios.*

FALSO. Se necesita además que su intersección sea el cero. Por ejemplo si $E = U = V = \mathbb{R}^2$ se cumple que $dim(U + V) = 2 = dim(E)$, pero U y V no son suplementarios por que su intersección es todo $\mathbb{R}^2$.

◯ Ninguna de las anteriores respuestas es correcta.

FALSO.

(b) *Sean F y G dos subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^{100}$ de dimensiones 80 y 50, respectivamente.*

◯ $\dim(F \cap G) \geq 30$.

VERDADERO. Recordemos que:

$$dim(F) + dim(G) = dim(F \cap G) + dim(F + G)$$

Además la dimensión de $F + G$ nunca puede superar la dimensión del espacio total. Por tanto en este caso:

$$dim(F \cap G) = dim(F) + dim(G) - dim(F + G) \geq dim(F) + dim(G) - dim(\mathbb{R}^{100}) = 30$$

◯ $F + G = \mathbb{R}^{100}$.

FALSO. Por ejemplo si denotamos a los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^{100}$ por $\bar{e}_i$, tomando F como el subespacio generado por $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_{80}\}$ y G generado por $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_{50}\}$, se tiene que $F + G = F$ y por tanto $dim(F + G) = 80$.

◯ $F \cap G = G$

FALSO. Por ejemplo tomando ahora F como el subespacio generado por $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_{80}\}$ y G generado por $\{\bar{e}_{51}, \ldots, \bar{e}_{100}\}$, se tiene que $\bar{e}_{100} \notin F$ y por tanto $F \cap G \neq G$.

◯ $\dim(F \cap G) \leq 30$.

FALSO. Basta considerar el ejemplo del segundo punto. Allí $F \cap G = G$ y por tanto $dim(F \cap G) = 50$.

(Primer parcial, febrero 2001)

(c) *Sea U un espacio vectorial real y $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ un conjunto de vectores linealmente independientes de U.*

◯ $dim(U) = 3$.

FALSO. Por ejemplo en $U = \mathbb{R}^4$ los vectores de la base canónica $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ son linealmente independientes, pero $dim(U) = dim(\mathbb{R}^4) = 4 > 3$.

◯ $dim(U) > 3$.

FALSO. Por ejemplo en $U = \mathbb{R}^3$ los vectores de la base canónica $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ son linealmente independientes, pero $dim(U) = dim(\mathbb{R}^3) = 3 \not> 3$.

◯ $\{\bar{u}_1, \bar{u}_1 + \bar{u}_2, \bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \bar{u}_3\}$ *pueden ser linealmente dependientes.*

FALSO. Por ser independientes los vectores $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ son una base del subespacio **que generan**. Las coordenadas de los vectores $\{\bar{u}_1, \bar{u}_1 + \bar{u}_2, \bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \bar{u}_3\}$ respecto a esta base forman una matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

de rango 3 y por tanto son linealmente independientes.

◯ *Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.*

VERDADERO.

(d) *Sea V un espacio vectorial cualquiera. Dados tres subespacios vectoriales A, B, C siempre se cumple:*

◯ $(A + B) \cap C \neq (A \cap C) + (B \cap C)$.

FALSO. Por ejemplo si $A = B = C$ se da la igualdad.

◯ $(A + B) \cap C \subset (A \cap C) + (B \cap C)$.

FALSO. Por ejemplo para $V = \mathbb{R}^2$, $A = \mathcal{L}(1,0)$, $B = \mathcal{L}(0,1)$ y $C = \mathcal{L}(1,1)$, no se cumple.

◯ $(A + B) \cap C \supset (A \cap C) + (B \cap C)$.

VERDADERO. Si $u \in (A \cap C) + (B \cap C)$ entonces u puede escribirse como:

$$u = a + b, \qquad \text{con } a \in A \cap C \text{ y } b \in B \cap C.$$

Entonces

$$u = a + b \in C \text{ ya que } a, b \in C \text{ y } C \text{ es subespacio vectorial.}$$

y

$$u = a + b \in A + B \text{ ya que } a \in A \text{ y } b \in B.$$

Deducimos que $u \in (A + B) \cap C$.

◯ $(A + B) \cap C = (A \cap C) + (B \cap C)$.

FALSO. Por ejemplo para $V = \mathbb{R}^2$, $A = \mathcal{L}(1,0)$, $B = \mathcal{L}(0,1)$ y $C = \mathcal{L}(1,1)$, no se cumple.

(e) *Sean U y W subespacios distintos de $\{\bar{0}\}$ de un espacio vectorial real V. Entonces*

◯ *Siempre podemos plantear la proyección sobre U paralelamente a W.*

FALSO. U y W han de ser suplementarios.

◯ *De ser posible plantear la proyección p sobre U paralelamente a W, Im(p)+W=V.*

VERDADERO. La imagen de la proyección sobre U es precisamente U. Para poder plantearse U y W han de ser suplementarios. Por tanto $Im(p) + W = V$.

◯ *De ser posible plantear la proyección p sobre U paralelamente a W, es un monomorfismo.*

FALSO. Todos los vectores de W van al 0 por la proyección. Por tanto si $dim(W) > 0$ no tiene porque ser inyectiva.

◯ *Ninguna de las anteriores afirmaciones es correcta.*

FALSO.

(f) *Sea V un espacio vectorial. Consideramos las bases $B_1 = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n\}$ y $B_2 = \{\bar{u}_n, \bar{u}_{n-1}, \ldots, \bar{u}_1\}$. Sea $M_{B_1B_2}$ la matriz de cambio de base de una a otra.*

La matriz de cambio de base es:

$$M_{B_1B_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para calcular el determinante vamos cambiando la fila 1 por la 2, luego la 2 por la 3, y así sucesivamente hasta llevarla a la posición n. Hemos hecho n-1 cambios de fila. Luego volvemos a coger la nueva fila 1 (que era la antigua fila 2) y la llevamos de igual forma a la posición n-1, con n-2 cambios.

De esta forma para llegar a la identidad el número de cambios de fila hechos son:

$$(n-1) + (n-2) + \dots + 1 = \frac{1+n-1}{2}(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Por tanto.

$$det(M_{B_1B_2}) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

○ $det(M_{B_1B_2}) = 1$.

FALSO. Falla en dimensión 2.

○ $det(M_{B_1B_2}) = -1$.

FALSO. Falla en dimensión 1.

○ $det(M_{B_1B_2}) = (-1)^{n+1}$.

FALSO. Falla en dimensión 3.

○ Ninguna de las anteriores respuestas es correcta.

VERDADERA.

I.– *Decidir cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales del espacio vectorial V de las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:*

En cada caso verificaremos:

i) que los conjuntos dados son no vacíos.

ii) que si tomamos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y f, g contenidas en el conjunto, entonces $\alpha f + \beta g$ siguen contenidos en el conjunto.

(a) *Funciones f tales que $2f(0) = f(1)$.*

i) Es no vacío ya que, por ejemplo, la función cero pertenece al conjunto, porque verifica $2(f(0)) = 0 = f(1)$.

ii) Tenemos:

$$2((\alpha f + \beta g)(0)) = \alpha 2f(0) + \beta 2g(0) = \alpha f(1) + \beta g(1) = (\alpha f + \beta g)(1)$$

luego vemos que $\alpha f + \beta g$ cumple la condición y por tanto SI ES un subespacio vectorial.

(b) *Funciones que toman valores distintos de 0 en todo punto.*

i) Es no vacío; sin embargo la función cero no pertenece al conjunto. Por tanto NO ES un subespacio vectorial.

(c) *Funciones f tales que $f(0)$ es un número racional.*

i) Es no vacío ya que, por ejemplo, contiene a la función cero, $f(x) = 0$, porque 0 es un número racional.

ii) Sin embargo si $f(0)$ y $g(0)$ son racionales $(\alpha f + \beta g)(0)$ no tiene porque ser un número racional; por ejemplo, si tomamos $f(x) = 1$, $g(x) = 0$, $\alpha = \sqrt{2}$ y $\beta = 0$. Por tanto NO ES un subespacio vectorial.

II.– *En el espacio vectorial real de las matrices 2×2 con elementos reales, $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, se consideran los subespacios*

$$U = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & a-b \\ -a & 2a+b \end{pmatrix}, \;\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

(a) *Determinar α y β para que pertenezca a U la matriz*

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & 0 \end{pmatrix}.$$

Antes de comenzar a hacer "cuentas" es una buena idea obtener una base lo más simple posible de U. Recordemos que la base canónica de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, son las matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Expresamos en esta base las matrices que generan U:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow (1,1,2,1)$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow (2,2,1,3)$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow (0,0,3,-1)$$

Ahora hacemos la reducción por filas de la matriz formada por estas coordenadas para encontrar una base lo más sencilla posible:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es decir U está generado por las matrices (independientes):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora estudiemos cuando la matriz

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & 0 \end{pmatrix}.$$

pertenece a U. En la base canónica tiene coordenadas $(\alpha, 1, \beta, 0)$. Hay que ver cuando este vector es dependiente con los vectores de la base de U, es decir, cuando la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ \alpha & 1 & \beta & 0 \end{pmatrix}$$

tiene rango 2. Para ello haciendo reducciones por fila obtenemos una matriz equivalente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1-\alpha & \beta-5\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Vemos que el rango de esta matriz es 2 precisamente si $\alpha = 1$ y $\beta = 5$.

(b) *Determinar α y β para que pertenezca a V la matriz*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}.$$

De nuevo para trabajar con V le calcularemos una base. En primer lugar, dado que:

$$\begin{pmatrix} a+b & a-b \\ -a & 2a+b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

vemos que V está generada por las matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De nuevo las expresamos en función de la base canónica y hacemos la simplificación:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Estudiemos cuando la matriz
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$$
pertenece a V. Sus coordenadas en la base canónica son $(1,0,\alpha,\beta)$. Para estudiar cuando está en V, basta comprobar cuando la matriz:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & \alpha & \beta \end{pmatrix}$$
tiene rango 2. Haciendo reducción por filas, obtenemos la matriz equivalente:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & \alpha+1/2 & \beta-3/2 \end{pmatrix}$$
Vemos que el rango es 2 precisamente si $\alpha = -1/2$ y $\beta = 3/2$.

(c) *Hallar la dimensión y una base de U.*

Ya lo hemos visto. Tiene dimensión 2 y hemos calculado la base en el apartado (a).

(d) *Hallar la dimensión y una base de V.*

También lo hemos hecho en (b). Tiene dimensión 2 y una base es:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

(e) *Hallar, en la base canónica, ecuaciones paramétricas y cartesianas de $U \cap V$*

Para hallar las ecuaciones cartesianas de $U \cap V$, calculamos las cartesianas de U, las de V y simplificamos el sistema formado por todas ellas.

Primero calculamos las cartesianas de U. Para ello escribimos las paramétricas utilizando la base que hemos calculado, y de ellas deducimos las cartesianas:
$$\left.\begin{array}{rclcr} x & = & \lambda & & \\ y & = & \lambda & & \\ z & = & 5\lambda & - & 3\mu \\ t & = & & & \mu \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = y \\ z = 5x - 3t \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x - y = 0 \\ 5x - z - 3t = 0 \end{array}\right.$$
Hacemos lo mismo para V:
$$\left.\begin{array}{rclcr} x & = & \lambda & & \\ y & = & & & \mu \\ z & = & -(1/2)\lambda & - & (1/2)\mu \\ t & = & (3/2)\lambda & & (1/2)\mu \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = -(1/2)x - (1/2)y \\ t = (3/2)x + (1/2)y \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + y + 2z = 0 \\ 3x + y - 2t = 0 \end{array}\right.$$
Ahora las ecuaciones cartesianas de $U \cap V$ son:
$$\begin{array}{l} x - y = 0 \\ 5x - z - 3t = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ 3x + y - 2t = 0 \end{array}$$
Pudiera ser que no fueran linealmente independientes. Lo comprobamos escribiéndolas en forma matricial y simplificando la matriz mediante operaciones fila:
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y por tanto las ecuaciones cartesianas buscadas son:

$$\begin{aligned} x - y &= 0 \\ y + z &= 0 \\ 2z + t &= 0 \end{aligned}$$

De estas obtenemos las paramétricas (hay cuatro incógnitas y tres ecuaciones independientes, luego quedará en función de un parámetro):

$$x = \lambda; \quad y = \lambda; \quad z = -\lambda; \quad t = 2\lambda$$

(f) *Hallar, en la base canónica, ecuaciones paramétricas y cartesianas de $U + V$*

Para hallar $U + V$ hay que ver cual es el espacio que generan las bases de U y V unidas. Para ello consideramos la matriz que tiene por filas las coordenadas de los vectores de estas bases y hacemos la reducción:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es decir vemos que $U + V$ está generado por los vectores de coordenadas $\{(1,0,-1/2,3/2),(0,1,-1/2,1/2),(0,0,-3,1)\}$. Ahora podemos escribir las ecuaciones paramétricas y de ellas (eliminando parámetros) las cartesianas:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & = & \lambda & & & & \\ y & = & & & \mu & & \\ z & = & -(1/2)\lambda & - & (1/2)\mu & - & 3\nu \\ t & = & (3/2)\lambda & + & (1/2)\mu & + & \nu \end{array}\right\} \Leftrightarrow 4x + y - z - 3t = 0$$

Observación: Hemos visto que $dim(U) = 2$, $dim(V) = 2$, $dim(U \cap V) = 1$ y $dim(U + V) = 3$. Vemos que se verifica la fórmula de la dimensión:

$$dim(U) + dim(V) = dim(U \cap V) + dim(U + V)$$

III.– *Sea $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices cuadradas de elementos reales y dimensión n.*

(a) *Demostrar que si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es una matriz fija, el conjunto*

$$S = \{B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) : AB = \Omega\}$$

es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

En primer lugar S es no vacío porque claramente $\Omega \in S$.

Sean $B, C \in S$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Hay que comprobar que $\lambda B + \mu C \in S$, es decir, que $A(\lambda B + \mu C) = \Omega \in S$. Pero:

$$A(\lambda B + \mu C) = \lambda AB + \mu AC = \Omega$$

ya que como $B, C \in S$ entonces $AB = AC = \Omega$.

(b) *Si $n = 2$ y A es de la forma*

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & 1 \end{pmatrix}$$

donde α, β son números reales, calcular en función de α, β la dimensión y una base de S y las ecuaciones implícitas de un subespacio suplementario de S.

Sea B una matriz cuyas coordenadas en la base canónica son (x^1, x^2, x^3, x^4), es decir:

$$B = \begin{pmatrix} x^1 & x^2 \\ x^3 & x^4 \end{pmatrix}$$

La condición para que B pertenezca a S es que $AB = \Omega$, es decir:

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha x^1 + x^3 \\ 0 &= \alpha x^2 + x^4 \\ 0 &= \beta x^1 + x^3 \\ 0 &= \beta x^2 + x^4 \end{aligned}$$

Es un sistema homogéneo. Si la matriz del sistema tiene determinante no nulo, entonces la única solución es la trivial. La matriz es:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 1 \\ \beta & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Su determinante es $(\alpha - \beta)^2$. Por tanto:

- Si $\alpha \neq \beta$ entonces la única solución del sistema es la trivial ($x^1 = x^2 = x^3 = x^4 = 0$). El subespacio S es 0 y el suplementario todo el espacio de matrices $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

- Si $\alpha = \beta$, la matriz del sistema tiene rango 2 (las dos últimas filas son iguales a las dos primeras). Por tanto el sistema tiene solución dependiendo de $4 - 2 = 2$ parámetos y entonces $dim(S) = 2$. En particular obtenemos:

$$\begin{aligned} x^3 &= -\alpha x^1 \\ x^4 &= -\alpha x^2 \end{aligned}$$

luego una base de S está formada por los vectores cuyas coordenadas contravariantes en la base canónica son $(1, 0, -\alpha, 0)$ y $(0, 1, 0, -\alpha)$.

Para calcular un espacio suplementario completamos la base a de S a una base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Basta tomar los vectores cuyas coordenadas en la base canónica son $(0, 0, 1, 0)$ y $(0, 0, 0, 1)$. Ya que es es claro que los cuatro vectores:

$$\begin{aligned} &(1, 0, -\alpha, 0) \\ &(0, 1, 0, -\alpha) \\ &(0, 0, 1, 0) \\ &(0, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

son una base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. El espacio suplementario está generado por tanto por los vectores $(0, 0, 1, 0)$ y $(0, 0, 0, 1)$. Sus ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{aligned} x^1 &= 0 \\ x^2 &= 0 \\ x^3 &= \lambda \\ x^4 &= \mu \end{aligned}$$

y las cartesianas:

$$\begin{aligned} x^1 &= 0 \\ x^2 &= 0 \end{aligned}$$

IV.– *En el espacio vectorial real de las matrices simétricas 3×3 con elementos reales, $\mathcal{S}_3$, decidir cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales, y para los que lo sean hallar una base, así como unas ecuaciones (paramétricas e implìcitas) en la base canónica y en la base*

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(a) *Matrices regulares.*

Veamos si son un subespacio vectorial. Sean A, B regulares y simétricas. Nos preguntamos si entonces $\lambda A + \mu B$ son regulares para cualquier $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. En general no es cierto. Por ejemplo las matrices $A = I_3$ y $B = -I_3$, son regulares y simétricas. Sin embargo $A + B = \Omega$ no es regular.

(b) *Matrices con traza nula.* Veamos si son un subespacio vectorial. Sean A, B de traza nula y simétricas. Nos preguntamos si entonces $\lambda A + \mu B$ tiene traza nula para cualquier $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Pero es claro que:

$$tr(\lambda A + \mu B) = \lambda(tr(A)) + \mu(tr(B))$$

y como $tr(A) = tr(B) = 0$ vemos que $tr(\lambda A + \mu B) = 0$.

Recordemos que la base canónica de las matrices simétricas es:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

En esta base la condición de tener la traza nula se escribe mediante la ecuación implícita:

$$x^1 + x^4 + x^6 = 0$$

y por tanto mediante las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{array}{lll} x^1 = \lambda_1; & x^2 = \lambda_2; & x^3 = \lambda_3; \\ x^4 = \lambda_4; & x^5 = \lambda_5; & x^6 = -\lambda_1 - \lambda_4; \end{array}$$

En la base B' la condición se escribe mediante la ecuación implícita:

$$y^1 + y^2 + y^4 + y^5 + y^6 = 0$$

y por tanto mediante las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{array}{lll} y^1 = \lambda_1; & y^2 = \lambda_2; & y^3 = \lambda_3; \\ y^4 = \lambda_4; & y^5 = \lambda_5; & y^6 = -\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_4 - \lambda_5; \end{array}$$

(c) *Matrices cuyas dos primeras filas son iguales.*

Veamos si son un subespacio vectorial. Sean A, B simétricas cada una ellas con las dos primeras filas iguales. Nos preguntamos si entonces $\lambda A + \mu B$ tiene las dos primeras filas iguales para cualquier $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Pero esto es cierto sin más que tener en cuenta que las dos primeras filas de $\lambda A + \mu B$ son la suma de λ por las dos primeras filas de A más μ por las dos primeras filas de B.

Las matrices simétricas con 2 filas iguales son de la forma:

$$\begin{pmatrix} a & a & b \\ a & a & b \\ b & b & c \end{pmatrix}$$

Por tanto en la base canónica las ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{array}{lll} x^1 = \lambda_1; & x^2 = \lambda_1; & x^3 = \lambda_2; \\ x^4 = \lambda_1; & x^5 = \lambda_2; & x^6 = \lambda_3 \end{array}$$

y las implícitas

$$x^1 - x^2 = 0$$
$$x^1 - x^4 = 0$$
$$x^3 - x^5 = 0$$

Para ver como serían las ecuaciones en la base B', vemos como son las ecuaciones de cambio de coordenadas de B' a B:

$$\begin{array}{lll} x^1 = y^1 + y^2; & x^2 = y^2 + y^3; & x^3 = y^3 + y^4; \\ x^4 = y^4 + y^5; & x^5 = y^5 + y^6; & x^6 = y^6 \end{array}$$

De aquí deducimos que las ecuaciones implícitas en la base B' son:

$$\left.\begin{array}{r} y^1 - y^3 = 0 \\ y^1 + y^2 - y^4 - y^5 = 0 \\ y^3 + y^4 - y^5 - y^6 = 0 \end{array}\right\}$$

y las paramétricas en las base B':

$$\begin{array}{lll} y^1 = \lambda_1; & y^2 = \lambda_2; & y^3 = \lambda_1; \\ y^4 = \lambda_3; & y^5 = \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3; & y^6 = -\lambda_2 + 2\lambda_3 \end{array}$$

V.– *Si W_1, W_2 y W_3 son subespacios vectoriales de un espacio vectorial V, estudiar si son ciertas las fórmulas:*

(a) $(W_1 + W_2) \cap W_3 \subset (W_1 \cap W_3) + (W_2 \cap W_3)$.

(b) $(W_1 \cap W_3) + (W_2 \cap W_3) \subset (W_1 + W_2) \cap W_3$.

Escribimos lo que significa que un vector $\bar{v}$ esté en cada uno de los subespacios que queremos comparar:

$$\bar{v} \in (W_1 + W_2) \cap W_3 \iff \begin{cases} \bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2, \quad \text{con} \quad \bar{v}_1 \in W_1, \bar{v}_2 \in W_2 \\ \text{y} \\ \bar{v} \in W_3 \end{cases}$$

y

$$\bar{v} \in (W_1 \cap W_3) + (W_2 \cap W_3) \iff \bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2, \quad \bar{v}_1 \in W_1 \cap W_3, \bar{v}_2 \in W_2 \cap W_3$$

Nos fijamos en que se cumple la siguiente implicación:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{v}_1 \in W_1 \cap W_3 \subset W_3 \\ \bar{v}_2 \in W_2 \cap W_3 \subset W_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 \in W_3 \text{ y } \bar{v}_1 \in W_1, \bar{v}_2 \in W_2.$$

Por tanto vemos que la inclusión (b) es cierta:

$$(W_1 \cap W_3) + (W_2 \cap W_3) \subset (W_1 + W_2) \cap W_3.$$

Por el contrario el recíproco de la implicación anterior parece que no tiene porque cumplirse. Esto nos induce a pensar que la inclusión (a) es falsa en general. Veamos un ejemplo:

$$V = \mathbb{R}^2; \quad W_1 = \mathcal{L}\{(1,0)\}; \quad W_2 = \mathcal{L}\{(0,1)\}; \quad W_3 = \mathcal{L}\{(1,1)\}.$$

De manera que:

$$W_1 + W_2 = \mathbb{R}^2; \quad W_1 \cap W_3 = \{\bar{0}\}; \quad W_2 \cap W_3 = \{\bar{0}\}$$

y

$$(W_1 + W_2) \cap W_3 = W_3; \qquad (W_1 \cap W_3) + (W_2 \cap W_3) = \{\bar{0}\}$$

Vemos que en este caso:

$$(W_1 + W_2) \cap W_3 \not\subset (W_1 \cap W_3) + (W_2 \cap W_3).$$

VI.– *Sea U el subespacio de $\mathbb{R}^3$ dado por las ecuaciones cartesianas:*

$$U \equiv \begin{cases} x + y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

¿Es posible determinar un subespacio V de $\mathbb{R}^3$ de forma que $U \cap V = \{\bar{0}\}$ y $U + V \equiv x + y + z = 0$?. Justifica tu respuesta.

El subespacio vectorial U tiene dimensión 1, porque está definido por dos ecuaciones independientes en $\mathbb{R}^3$. El espacio suma que nos exigen tiene dimensión 1, porque está definido por una ecuación en $\mathbb{R}^3$.

Además necesariamente tiene que cumplirse $U \subset U + V$. Pero vemos que esto está claro, porque la ecuación que define $U + V$ es una de las que define U.

Por tanto teniendo en cuenta la fórmula de las dimensiones, la dimensión de V, si es posible construirlo, es:

$$dim(V) = dim(U + V) + dim(U \cap V) - dim(U) = 2 + 0 - 1 = 1.$$

Concluimos que el espacio V ha de ser una recta, contenida en el plano $U + V$ y distinta de U para que $U \cap V = \{0\}$. Podemos tomar por ejemplo la recta:

$$V \equiv \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Está contenida en $U + V$ y es distinta de U, porque la ecuación $x = 0$ es independiente de las que definen U.

VII.– *En un espacio vectorial real E de dimensión 4 se consideran dos subespacios vectoriales V y W que con respecto a determinada base de E vienen descritos por las ecuaciones*

$$V : \begin{cases} x - ay + z + bt &= 0 \\ y - t &= 0 \end{cases} \qquad W : \begin{cases} ax - y - bz + t &= 0 \\ x + z &= 0 \end{cases}$$

donde a, b son dos números reales arbitrarios. En función de a y b, calcular las dimensiones de los subespacios V, W, $V \cap W$ y $V + W$.

Tenemos en cuenta que la dimensión de un subespacio definido mediante ecuaciones implícitas es igual a la diferencia entre la dimensión del espacio total y el número de ecuaciones independientes. Además:

$$dim(V) + dim(W) = dim(V + W) + dim(V \cap W)$$

Primero vemos el número de ecuaciones independientes que definen V. Matricialmente sus coeficientes se escriben:

$$\begin{pmatrix} 1 & -a & 1 & b \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Vemos que el rango siempre es 2, porque el menor formado por las dos primeras columnas tiene determinante no nulo. Por tanto:

$$dim(V) = dim(E) - 2 = 2$$

Ahora hacemos lo mismo para el subespacio W. La matriz de coeficientes de sus ecuaciones es:

$$\begin{pmatrix} a & -1 & -b & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

De nuevo siempre es de rango 2, porque el menor formado por las dos últimas columnas siempre tiene determinante distinto de cero. Luego:

$$dim(W) = dim(E) - 2 = 2$$

El espacio $V \cap W$ es el definido por las cuatro ecuaciones (las dos de V y las dos de W). Ahora la matriz de coeficientes es:

$$\begin{pmatrix} 1 & -a & 1 & b \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ a & -1 & -b & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Su determinante es $(a + b)(a - b)$, por tanto tenemos:

- Si $a \neq b$ y $a \neq -b$ entonces el rango de la matriz es 4. Las 4 ecuaciones son independientes y el espacio que definen es el $\{\bar{0}\}$. Entonces:

$$dim(V \cap W) = 0; \qquad dim(V + W) = 4.$$

- Si $a = b$, $a \neq 0$, entonces el determinante se anula y el rango es menor o igual que 3. Pero el menor formado por las tres primeras filas y columnas tiene determinante no nulo. Por tanto el rango es exactamente 3. En este caso:

$$dim(V \cap W) = 1; \qquad dim(V + W) = 3.$$

- Si $a = -b$, $a \neq 0$, de nuevo el determinante se anula y el rango es menor o igual que 3. El menor formado por las tres últimas columnas y las filas $1, 2, 4$ tiene determinante no nulo. Entonces el rango es exactamente tres y otra vez:

$$dim(V \cap W) = 1; \qquad dim(V + W) = 3.$$

- Si $a = b = 0$ entonces el rango de la matriz es 2 y:

$$dim(V \cap W) = 2; \qquad dim(V + W) = 2;$$

(de hecho en este caso $V = W = V \cap W = V + W$).

VIII.– *En* $\mathbb{R}^4$ *se define el subespacio* F *engendrado por los vectores:* $\bar{u}_1 = (1, 0, -1, 3)$, $\bar{u}_2 = (2, -1, 0, 7)$, $\bar{u}_3 = (3, -1, 5, 0)$. *Además, se define la relación:*

$$\forall \bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}^4, \bar{u}\mathcal{R}\bar{v} \Leftrightarrow \bar{v} - \bar{u} \in F.$$

¿Es $\mathcal{R}$ *una relación de equivalencia? Si lo es, hallar las clases de equivalencia del espacio cociente.*

Veamos si cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva:

- REFLEXIVA: Sea $\bar{u} \in \mathbb{R}^4$. Teniendo en cuenta que cualquier subespacio vectorial siempre contiene al vector $\bar{0}$, se tiene:

$$\bar{u} - \bar{u} = \bar{0} \in F \quad \Rightarrow \quad \bar{u}\mathcal{R}\bar{u}.$$

- SIMÉTRICA: Sean $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}^4$ tales que $\bar{u}\mathcal{R}\bar{v}$. Entonces:

$$\bar{u}\mathcal{R}\bar{v} \quad \Rightarrow \quad \bar{v} - \bar{u} \in F \quad \Rightarrow \quad -(\bar{v} - \bar{u}) \in F \quad \Rightarrow \quad \bar{u} - \bar{v} \in F \quad \Rightarrow \quad \bar{u}\mathcal{R}\bar{v}$$

(hemos utilizado que, por ser F subespacio vectorial, si un vector está en F también lo está su opuesto).

- TRANSITIVA: Sean $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^4$ tales que $\bar{u}\mathcal{R}\bar{v}$, $\bar{v}\mathcal{R}\bar{w}$. Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{u}\mathcal{R}\bar{v} \quad \Rightarrow \quad \bar{v} - \bar{u} \in F \\ \bar{v}\mathcal{R}\bar{w} \quad \Rightarrow \quad \bar{w} - \bar{v} \in F \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad (\bar{v} - \bar{u}) + (\bar{w} - \bar{v}) \in F \quad \Rightarrow \quad \bar{w} - \bar{u} \in F \quad \Rightarrow \quad \bar{u}\mathcal{R}\bar{w}$$

(utilizamos que, por ser F subespacio vectorial, la suma de dos vectores de F sigue estando en F).

Estudiemos el conjunto cociente. Nos fijamos en lo siguiente. Los vectores que generan F son independientes, ya que la matriz que forman tiene rango 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 8 & -9 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -10 \end{pmatrix}$$

Podemos completar estos vectores hasta una base:

$$B = \{(1, 0, -1, 3), (0, -1, 2, 1), (0, 0, 6, -10), (0, 0, 0, 1)\}$$

de forma que cualquier vector de $\mathbb{R}^4$ se escribe de manera única como combinación lineal de los vectores de la base.

Entonces el conjunto cociente está formado por los vectores:

$$\frac{\mathbb{R}^4}{\mathcal{R}} = \{C[(0, 0, 0, a)] \,|\, a \in \mathbb{R}\}$$

Comprobémoslo:

- En primer lugar dos vectores $(0, 0, 0, a)$ y $(0, 0, 0, b)$ con $a \neq b$ no pertenecen a la misma clase, porque

$$(0, 0, 0, a) - (0, 0, 0, b) = (0, 0, 0, a - b) \notin F.$$

- Además cualquier vector $\bar{u}$ de $\mathbb{R}^4$ puede escribirse como:

$$\bar{u} = u^1(1, 0, -1, 3) + u^2(0, -1, 2, 1) + u^3(0, 0, 6-, 10) + u^4(0, 0, 0, 1)$$

y por tanto:

$$\bar{u} - (0, 0, 0, u^4) = u^1(1, 0, -1, 3) + u^2(0, -1, 2, 1) + u^3(0, 0, 6-, 10) \in F \quad \Rightarrow \quad \bar{u}\mathcal{R}(0, 0, 0, u^4)$$

Es decir $\bar{u}$ está relacionado con uno de los vectores descritos en el conjunto de clases de equivalencia.

IX.– *Consideremos los subespacios U y W de $\mathbb{R}^3$ tales que U está generado por los vectores $(1,0,1),(0,1,1),(1,1,2)$ y la ecuación implícita de W es $x-y+2z=0$. Se pide:*

(a) *Bases de U, W, $U+W$ y $U\cap W$.*

Del sistema generador dado para el subespacio U, obtenemos un sistema generador linealmente independiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto una base de U es:

$$\{(1,0,1),(0,1,1)\}.$$

Por otra parte W es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ definido por una ecuación. Tiene dimensión $3-1=2$. Una base estará formada por dos vectores independientes verificando su ecuación:

$$\{(1,1,0),(0,2,1)\}$$

El espacio $U+V$ está generado por la base de U unida a la de W. Buscamos un sistema de generadores independiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vemos que generan un espacio de dimensión 3. Por tanto $U+V=\mathbb{R}^3$ y como base podemos tomar la base canónica.

Finalmente para calcular $U\cap V$, hallamos la ecuación implícita de U a parir de las paramétricas:

$$\left.\begin{aligned} x &= a \\ y &= b \\ z &= a+b \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad z=x+y.$$

Por tanto las ecuacionesn implícitas de la intersección son:

$$\begin{aligned} x+y-z &= 0 \\ x-y+2z &= 0 \end{aligned}$$

Para escribir una base escogemos un vector verificando ambas ecuaciones:

$$\{(1,-3,-2)\}.$$

(b) *Ecuaciones implícitas de $U\cap W$.*

Las hemos hallado en el apartado anterior:

$$\begin{aligned} x+y-z &= 0 \\ x-y+2z &= 0 \end{aligned}$$

(c) *Base de un subespacio H suplementario de $U\cap W$.*

Teniendo en cuenta que $U\cap W$ tiene dimensión 1 y es un subespacio de $\mathbb{R}^3$, un suplementario será un subespacio de dimensión 2 cuya suma con esta intersección sea el total $\mathbb{R}^3$. Por tanto, como base basta escoger dos vectores independientes con el vector $(1,-3,-2)$ que genera $U\cap W$. Por ejemplo:

$$H=\mathcal{L}\{(1,0,0),(0,1,0)\},$$

ya que la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

tiene rango máximo 3.

(d) *Proyección del vector* $(2,3,5)$ *sobre el subespacio* $U \cap W$ *paralelamente a* H.

Consideramos una base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores de H y $U \cap W$:

$$B = \{(1,0,0),(0,1,0),(1,-3,-2)\}.$$

Expresemos el vector $(2,3,5)$ en esta base. Si llamamos C a la base canónica de $\mathbb{R}^3$ se tiene:

$$(2,3,5)_C M_{CB} = (2,3,5)_C M_{BC}^{-1} = (2,3,5)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = (9/2,-9/2,-5/2)_B.$$

Es decir:

$$(2,3,5) = \underbrace{\frac{9}{2}(1,0,0) - \frac{9}{2}(0,1,0)}_{\in H} \underbrace{-\frac{5}{2}(1,-3,-2)}_{\in U\cap W}.$$

La proyección sobre $U \cap W$ paralelamente a H será:

$$-\frac{5}{2}(1,-3,-2) = (-\frac{5}{2},\frac{15}{2},5).$$

X.– *En el espacio vectorial* $\mathbb{R}^3$*, dados dos valores reales* $a, b \in R$ *se definen los subespacios:*

$$U = \mathcal{L}\{(1,a,1),(b,1,a)\}, \qquad V = \mathcal{L}\{(0,1,1),(a-1,1,b)\}.$$

(a) *Calcular en función de* a *y* b *la dimensión de* $U \cap V$.

Utilizaremos que:

$$dim(U \cap V) = dim(U) + dim(V) - dim(U+V).$$

Estudiamos la dimensión de U:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ b & 1 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-ab & a-b \end{pmatrix}.$$

Vemos que el rango es 2 excepto si se cumple simultáneamente que:

$$1-ab=0, \qquad a=b.$$

Resolviendo el sistema obtenemos $a=b=1$ ó $a=b=-1$. Por tanto:

Parámetros	$dim(U)$
$a=b=1$	1
$a=b=-1$	1
otro caso	2

Estudiamos la de V:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a-1 & 1 & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a-1 & 0 & b-1 \end{pmatrix}.$$

Vemos que el rango es 2 excepto si se cumple simultáneamente que:

$$a-1=0, \qquad b-1=0.$$

Resolviendo el sistema obtenemos $a = b = 1$. Por tanto:

Parámetros	$dim(V)$
$a = b = 1$	1
otro caso	2

Vayamos con la suma de ambos subespacios:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ b & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ a-1 & 1 & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-a \\ b & 0 & a-1 \\ 0 & 1 & 1 \\ a-1 & 0 & b-1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1-b(1-a) \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b-1-(a-1)(1-a) \end{pmatrix}$$

El rango es 3 excpeto si se cumple simultáneamente que:

$$a - 1 - b(1-a) = 0, \qquad b - 1 - (a-1)(1-a) = 0.$$

Resolviendo el sistema obtenemos:

Parámetros	$dim(U+V)$
$a = b = 1$	2
$a = 1 \pm \sqrt{2}, \quad b = -1$	2
otro caso	3

Aplicando la fórmula para la dimensión de la intersección tenemos:

Parámetros	$dim(U)$	$+$	$dim(V)$	$-$	$dim(U+V)$	$=$	$dim(U \cap V)$
$a = b = 1$	1		1		2		0
$a = b = -1$	1		2		3		0
$a = 1 \pm \sqrt{2}, \quad b = -1$	2		2		2		0
otro caso	2		2		3		1

(b) *Calcular los valores de a y b para los cuales los subespacios son suplementarios.*

Son suplementarios si $dim(U \cap V) = 0$ y $dim(U + V) = dim(\mathbb{R}^3) = 3$. Vimos que eso se cumple para $a = b = -1$.

(d) *Para $a = b = 0$ calcular las ecuaciones cartesianas y paramétricas de $U \cap V$.*

Vimos que en ese caso la dimensión de la intersección es 1.

Tenemos:

$$U = \mathcal{L}\{(1,0,1),(0,1,0)\}.$$

Sus paramétricas son

$$x = a, \quad y = b, \quad z = a.$$

y la implícita:

$$x = z.$$

Por otra parte:

$$V = \mathcal{L}\{(0,1,1),(-1,1,0)\}.$$

Sus paramétricas son

$$x = -b, \quad y = a + b, \quad z = a.$$

y la implícita:

$$y = z - x.$$

Concluimos que las implícitas de la intersección son:

$$x = z, \quad y = z - x.$$

o equivalentemente:

$$x = z, \quad y = 0.$$

Las paramétricas serán:

$$x = \lambda, \quad y = 0, \quad z = \lambda.$$

XI.– *Encontrar la (única) respuesta correcta, de entre las indicadas, a las siguientes cuestiones:*

(a) *Sea $S = \{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_p\}$ sistema ligado de vectores de un espacio vectorial V.*

◯ *Cualquier vector de S se puede poner como combinación lineal de los restantes.*

FALSO. Por ejemplo en $\mathbb{R}^3$ el sistema $\{(1,0,0),(2,0,0),(0,0,1)\}$ es ligado porque el primer y segundo vector son linealmente dependientes. Sin embargo el tercer vector no se puede poner como combinación lineal de los otros dos.

◯ *S contiene alguna base de V.*

FALSO. De nuevo vale el ejemplo anterior.

◯ *$dim\,\mathcal{L}(S) < p$*

VERDADERO. En general un sistema de p vectores genera un subespacio de dimensión a lo sumo p. Pero por ser ligado, alguno de los vectores es 0 o es combinación lineal de los demás. Por tanto $\mathcal{L}(S)$ puede generarse por $p-1$ vectores (¡o por menos!) y $\dim \mathcal{L}(S) < p$.

◯ *S se puede completar a una base de V.*

FALSO. Los vectores de una base nunca son ligados. Por tanto aunque le añadamos vectores al sistema que nos dan nunca podrá formarse una base.

(b) *Si L_1 y L_2 son dos subespacios de un espacio vectorial V, se tiene*

◯ *si $dimL_1 + dimL_2 > dimV$, entonces $L_1 \cap L_2 \neq \{\bar{0}\}$.*

VERDADERO. Razonamos como en el apartado 1 de la cuestión anterior:

$$dim(L_1) + dim(L_2) = dim(L_1 \cap L_2) + dim(L_1 + L_2) \leq dim(L_1 \cap L_2) + dim(V)$$

entonces,

$$dim(L_1 \cap L_2) \geq dim(L_1) + dim(L_2) - dim(V)$$

pero como por hipótesis $dim(L_1) + dim(L_2) > dim(V)$ entonces deducimos que $dim(L_1 \cap L_2) > 0$ y por tanto $L_1 \cap L_2 \neq \{\bar{0}\}$.

◯ *si $dim(L_1 + L_2) = dimV$, entonces $L_1 \cap L_2 = \{\bar{0}\}$.*

FALSO. Por ejemplo en $\mathbb{R}^3$, L_1 generado por $(1,0,0),(0,1,0)$ y L_2 generado por $(1,0,0),(0,0,1)$. En este caso $dim(L_1 + L_2) = 3$, pero $dim(L_1 \cap L_2) = 1$.

◯ *si $L_1 \cap L_2 \neq \{\bar{0}\}$, entonces $dimL_1 + dimL_2 > dimV$.*

FALSO. Por ejemplo en $\mathbb{R}^3$, tomamos $L^1 = L^2$ generado por $(1,0,0)$. Ahora $L_1 \cap L_2 \neq \{\bar{0}\}$ y $dim(L^1) + dim(L^2) = 2 < dim(\mathbb{R}^3)$.

◯ *si $L_1 \cap L_2 = \{\bar{0}\}$, entonces $dim(L_1 + L_2) = dimV$.*

FALSO. Por ejemplo en $\mathbb{R}^3$, tomamos L^1 generado por $(1,0,0)$ y L^2 generado por $(0,1,0)$. Ahora $L_1 \cap L_2 = \{\bar{0}\}$, pero $dim(L^1 + L^2) = 2 < dim(\mathbb{R}^3)$.

(c) *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ y $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ una base suya*

◯ V no es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

FALSO. Sólo hay que tener en cuenta que la misma operación de producto por un escalar que tenemos en V como e.v. complejo, nos da una operación producto por un número real que dota a V de estructura de espacio vectorial real.

◯ La dimensión del espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$ es seis.

VERDADERO. Veamos que $\{\vec{a}, i\vec{a}, \vec{b}, i\vec{b}, \vec{c}, i\vec{c}\}$ es una base de V como espacio vectorial real:

- Primero veamos que es un sistema generador. Sea $\vec{v} \in V$. Por ser $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ una base de V como e.v. complejo, sabemos que $\vec{v}$ se escribe como:

$$\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$$

donde x, y, z son números complejos de la forma $x = x_1 + x_2 i$, $y = y_1 + y_2 i$, $z = z_1 + z_2 i$ con $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$. Por tanto queda:

$$\vec{v} = x_1\vec{a} + x_2 i\vec{a} + y_1\vec{b} + y_2 i\vec{b} + z_1\vec{c} + z_2 i\vec{c}$$

- Veamos que son linealmente independientes en V como espacio vectorial REAL. Supongamos:

$$x_1\vec{a} + x_2 i\vec{a} + y_1\vec{b} + y_2 i\vec{b} + z_1\vec{c} + z_2 i\vec{c} = 0$$

con $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$(x_1 + x_2 i)\vec{a} + (y_1 + y_2 i)\vec{b} + (z_1 + z_2 i)\vec{c} = 0$$

y por tanto por ser $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ independientes en V como espacio vectorial complejo, obtenemos:

$$x_1 + x_2 i = 0; \quad y_1 + y_2 i = 0; \quad z_1 + z_2 i = 0;$$

y por fin:

$$x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = z_1 = z_2 = 0$$

○ $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ es una base del espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$.

FALSO. Vimos que como espacio vectorial real tiene dimensión 6. En concreto, por ejemplo, el vector $i\vec{a}$ no puede ponerse como combinación lineal real de los vectores de $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$.

○ $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}i\}$ es un sistema ligado del espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$.

FALSO. Porque si tenemos:

$$x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} + t(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}i) = 0; \text{ con } x, y, z, t \in \mathbb{R}$$

por ser $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ independientes en V como espacio vectorial complejo:

$$x - t = 0; \quad y - t = 0; \quad z + ti = 0;$$

y deducimos $x = y = z = t = 0$. Luego los cuatro vectores que nos indican son linealmente independientes en V como espacio vectorial real.

(d) *En el espacio vectorial V de las matrices cuadradas reales $n \times n$. Llamamos S al subconjunto formado por todas las matrices ortogonales.*

Una matriz ortogonal es aquella que multiplicada por su traspuesta es la identidad. Pero la matriz Ω no cumple esta propiedad, luego S no es un subespacio vectorial.

○ *S es un subespacio vectorial de V de dimensión $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$.*

FALSO.

○ *S es un subespacio vectorial de V de dimensión $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$.*

FALSO.

○ *S no es un subespacio vectorial de V.*

VERDADERO.

○ *Ninguna de las anteriores es correcta.*

FALSO.

(e) *Sea V un espacio vectorial real de dimensión 127.*

○ *Puedo escoger 128 vectores de V que sean linealmente independientes.*

FALSO. En un espacio de dimensión 127, el máximo número de vectores linealmente independientes es 127.

- ◯ *Toda aplicación lineal entre V y $\mathbb{R}^{127}$ es un isomorfismo.*

  FALSO. Hay muchas aplicaciones lineales entre V y $\mathbb{R}^{127}$ que NO son isomorfismos. Por ejemplo la aplicación 0:

  $$f : V \longrightarrow \mathbb{R}^{127}; \qquad f(\bar{v}) = \bar{0},$$

  no es inyectiva y por tanto no es isomorfismo.

- ◯ *En un conjunto de 200 vectores de V siempre puedo seleccionar 127 que sean linealmente independientes.*

  FALSO. Si los 200 vectores generan un subespacio de dimensión menor que 127 nunca podrán extraerse 127 linealmente independientes. Como ejemplo concreto, si los 200 vectores son:

  $$\{n \cdot \bar{v} | \, n \in \mathbb{Z}, \, 1 \leq n \leq 200\} \qquad \text{donde } \bar{v} \text{ es un vector no nulo de } V.$$

  El espacio que generan es $\mathcal{L}\{\bar{v}\}$, tiene dimensión 1 y por tanto cualquier subconjunto de 2 o más vectores extraído de los anteriores no es un sistema de vectores linealmente independientes.

- ◯ *Ninguna de las anteriores afirmaciones es correcta.*

  VERDADERO.

(f) *En $\mathbb{R}^2$ consideramos las bases $C = \{(1,0),(0,1)\}$, $B_1 = \{(1,2),(3,5)\}$ y $B_2 = \{(3,1),(2,1)\}$. Sean las matrices:*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}; \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix};$$

Entonces si (x,y) son las coordenadas de un vector en la base B_1, las coordenadas de dicho vector en la base B_2 se obtienen mediante el producto:

Para pasar de la base B_i, $i = 1,2$ a la canónica hay que multiplicar por la correspondiente matriz A_i, $i = 1,2$.

Para pasar de la base canónica a la base B_i, $i = 1,2$ hay que multiplicar por la correspondiente matriz A_i^{-1}, $i = 1,2$.

Por tanto para pasar de B_1 a B_2, primero multiplicamos por A_1 y estamos en la canónica y luego por A_2^{-1} y pasamos a B_2.

- ◯ $(\,x \quad y\,)\, A_1 A_2$.

  FALSO.

- ◯ $(\,x \quad y\,)\, A_1^{-1} A_2$.

  FALSO.

- ◯ $(\,x \quad y\,)\, A_1 A_2^{-1}$.

  VERDADERO.

- ◯ $(\,x \quad y\,)\, A_1^{-1} A_2^{-1}$.

  FALSO.

  (Primer parcial, enero 2004)