

Formulario Esencial de Física General

By ir. J.C.A. Wevers

Querido lector:

Este documento contiene 108 páginas con muchas ecuaciones de física. Se escribió para estudiantes avanzados de licenciatura y de posgrado. El libro busca ser referencia corta para cualquiera quien trabaja en física y frecuentemente necesita encontrar una ecuación.

Esta, y la versión en Holandés del documento, puede ser obtenido directamente del autor, Johan Wevers (johanw@vulcan.xs4all.nl).

Este puede ser tambien obtenido en la WWW. Desde la dirección: <http://www.xs4all.nl/~johanw/index.html>, donde tambien pueden encontrar versiones en Postscript y PDF.

Si encuentra cualquier error o tiene algún comentario, por favor permítame saberlo. Estoy siempre abierto a las recomendaciones y correcciones posibles al formulario de física.

This document is copyright by J.C.A. Wevers. All rights are reserved. Permission to use, copy and distribute this unmodified document by any means and for any purpose *except profit purposes* is hereby granted. Reproducing this document by any means, included, but not limited to, printing, copying existing prints, publishing by electronic or other means, implies full agreement to the above non-profit-use clause, unless upon explicit prior written permission of the author.

This document is provided by the author “as is”, with all its faults. Any express or implied warranties, including, but not limited to, any implied warranties of merchantability, accuracy, or fitness for any particular purpose, are disclaimed. If you use the information in this document, in any way, you do so at your own risk.

El formulario de física fue realizado mediante los programas \TeX y \LaTeX version 2.09. It can be possible that your \LaTeX version has problems compiling the file. The most probable source of problems would be the use of large bezier curves and/or \emTeX specials in pictures. If you prefer the notation in which vectors are typefaced in boldface, uncomment the redefinition of the $\backslash\text{vec}$ command in the \TeX file and recompile the file.

Johan Wevers

Contents

Contenido	I
Constantes físicas	1
1 Mecánica	3
1.1 Cinemática de una partícula puntual en un sistema de coordenadas fijo	3
1.1.1 Definiciones	3
1.1.2 Coordenadas polares	3
1.2 Movimiento relativo	3
1.3 Dinámica puntual de un sistema de coordenadas fijo	3
1.3.1 Fuerza, (angular)momentum y energía	3
1.3.2 Campos de fuerza conservativa	4
1.3.3 Gravitación	4
1.3.4 Ecuaciones de orbitas	4
1.3.5 El teorema virial	5
1.4 La dinámica de una partícula puntual en un sistema coordinado en movimiento	6
1.4.1 Fuerzas aparentes	6
1.4.2 Notación para tensores	6
1.5 Dinámica de una colección de masas puntuales	6
1.5.1 El centro de masa	6
1.5.2 Colisiones	7
1.6 Dinámica de cuerpos rígidos	7
1.6.1 Momento de inercia	7
1.6.2 Ejes principales	7
1.6.3 Dependencia con el tiempo	8
1.7 Calculo variacional, mecánica de Hamilton y Lagrange	8
1.7.1 Calculo variacional	8
1.7.2 Mecánica de Hamilton	8
1.7.3 Movimiento alrededor del equilibrio, linealización	9
1.7.4 Espacion de fase, ecuación de Liouville	9
1.7.5 Funciones generadoras	9
2 Electricidad y Magnetismo	11
2.1 Las ecuaciones de Maxwell	11
2.2 Fuerza y potencial	11
2.3 Transformaciones de norma	12
2.4 Energía de un campo electromagnético	12
2.5 Ondas electromagnéticas	12
2.5.1 Ondas electromagnéticas en el vacío	12
2.5.2 Ondas electromagnéticas en la materia	13
2.6 Multipolos	13
2.7 Corrientes eléctricas	14
2.8 Campos depolarizados	14
2.9 Mezclas de materiales	15

3	Relatividad	17
3.1	Relatividad especial	17
3.1.1	Las transformación de Lorentz	17
3.1.2	Corrimiento al azul o al rojo	18
3.1.3	El tensor de tension-energia y el tensor de campo	18
3.2	Relatividad general	18
3.2.1	Geometría de Riemannian, el tensor de Einstein	18
3.2.2	El elemento de línea	19
3.2.3	Las orbitas planetarias y el corrimiento del perihelio	20
3.2.4	La trayectoria de un foton	21
3.2.5	Ondas gravitacionales	21
3.2.6	Cosmología	21
4	Oscilaciones	23
4.1	Oscilaciones armónicas	23
4.2	Oscilaciones mecanicas	23
4.3	Oscilaciones eléctricas	24
4.4	Ondas en conductores largos	24
4.5	conductores y trasformadores acoplados	24
4.6	Péndulos	24
5	Ondas	25
5.1	La ecuación de onda	25
5.2	Soluciones a la ecuación de onda	25
5.2.1	Ondas planas	25
5.2.2	Ondas esfericas	26
5.2.3	Ondas cilindricas	26
5.2.4	la solución general en una dimensión	26
5.3	El método de la fase estacionaria	27
5.4	Funciones de Green para problemas de valores iniciales	27
5.5	Guías de onda y cavidades resonantes	27
5.6	Ecuaciones de ondas no lineales	28
6	Óptica	31
6.1	La desviación de la luz	31
6.2	Óptica geométrica paraxial	31
6.2.1	Lentes	31
6.2.2	Espejos	32
6.2.3	Planos principales	32
6.2.4	Magnificación	32
6.3	Metodos matriciales	33
6.4	Aberraciones	33
6.5	Reflexión y transmisión	33
6.6	Polarización	34
6.7	Prismas y dispersión	35
6.8	Difracción	35
6.9	Efectos ópticos especiales	36
6.10	Interferómetro de Fabry-Perot	37
7	Física estadística	39
7.1	Grados de libertad	39
7.2	La función de distribución de energía	39
7.3	Presión en un muro	40
7.4	La ecuación de estado	40
7.5	Colisiones entre moléculas	41

7.6	Interacción entre moléculas	41
8	Termodinámica	43
8.1	Introducción matemática	43
8.2	Definiciones	43
8.3	Thermal heat capacity	43
8.4	Las leyes de la termodinámica	44
8.5	funciones de estado y relaciones de Maxwell	44
8.6	Procesos	45
8.7	Trabajo máximo y mínimo	46
8.8	Transiciones de fase	46
8.9	Potencial termodinámico	47
8.10	Mezclas ideales	47
8.11	Condiciones de equilibrio	47
8.12	Bases estadísticas para la termodinámica	48
8.13	Aplicaciones a otros sistemas termodinamicos	48
9	Fenómenos de transporte	49
9.1	Introducción matemática	49
9.2	Leyes de la conservación	49
9.3	Ecuación de Bernoulli	51
9.4	Caracterización de flujos por números adimensionales	51
9.5	Flujo tubular	52
9.6	Teoría del potencial	52
9.7	Capas de la frontera	53
9.7.1	flujo de capas de fronteras	53
9.7.2	Temperatura de capas de fronteras	53
9.8	Conductancia del calor	54
9.9	Turbulencia	54
9.10	Auto organización	54
10	Física cuántica	55
10.1	Introducción a la física cuántica	55
10.1.1	Radiación de cuerpo negro	55
10.1.2	El efecto Compton	55
10.1.3	Difracción de electrones	55
10.2	funciones de onda	55
10.3	Operadores en física cuántica	56
10.4	El principio de incertidumbre	56
10.5	La ecuación de Schrödinger	56
10.6	Paridad	57
10.7	El efecto túnel	57
10.8	El oscilador armónico	57
10.9	Angular momentum	57
10.10	Spin	58
10.11	El formalismo de Dirac	58
10.12	física atómica	59
10.12.1	Soluciones	59
10.12.2	Ecuaciones de valores propios	59
10.12.3	interacion de orbita-spin	60
10.12.4	Reglas de selección	60
10.13	Interracción con campos electromagneticos	60
10.14	Teoría de perturbaciones	61
10.14.1	Teoría de perturbaciones dependiente del tiempo	61
10.14.2	Teoría de perturbaciones dependiente del tiempo	61

10.15	Sistemas de N-partículas	62
10.15.1	General	62
10.15.2	Moléculas	62
10.16	Quantum statistics	63
11	Física de Plasmas	65
11.1	Introducción	65
11.2	Transporte	65
11.3	Colisiones elásticas	66
11.3.1	General	66
11.3.2	La interacción de Coulomb	67
11.3.3	La interacción del dipolo inducido	67
11.3.4	El centro de masa del sistema	67
11.3.5	Luz esparcida	67
11.4	Termodinámica en equilibrio y reversibilidad	68
11.5	Colisiones inelásticas	68
11.5.1	Tipos de colisiones	68
11.5.2	Sección efectiva	69
11.6	Radiación	69
11.7	La ecuación de transporte de Boltzmann	70
11.8	Modelos radiativos de colisión	71
11.9	Ondas en plasmas	71
12	Física del estado sólido	73
12.1	Estructura cristalina	73
12.2	Enlace cristalino	73
12.3	Vibraciones cristalinas	74
12.3.1	Una capa con un tipo de átomo	74
12.3.2	Una capa con dos tipos de átomos	74
12.3.3	Fonones	74
12.3.4	Capacidad térmica	75
12.4	Campo magnético en el estado sólido	76
12.4.1	Dieléctricos	76
12.4.2	Paramagnetismo	76
12.4.3	Ferromagnetismo	76
12.5	Electrón libre en un gas de Fermi	77
12.5.1	Thermal heat capacity	77
12.5.2	Conduccion electrica	78
12.5.3	El efecto Hall	78
12.5.4	Conductividad termica	78
12.6	Bandas de Energía	78
12.7	Semiconductores	78
12.8	Superconductividad	80
12.8.1	Descripción	80
12.8.2	El efecto Josephson	80
12.8.3	Cuantización del flujo en un anillo superconductor	81
12.8.4	Interferencia cuántica microscópica	81
12.8.5	La ecuación de London	81
12.8.6	El modelo BCS	81

13 Teoría de grupos	83
13.1 Introducción	83
13.1.1 Definición de un grupo	83
13.1.2 La tabla de Cayley	83
13.1.3 Elementos subgrupos y clases conjugadas	83
13.1.4 Isomorfismo y homomorfismo; representaciones	84
13.1.5 Representación reducibles e irreducibles	84
13.2 El fundamental del teorema de ortoganilidad	84
13.2.1 El lema de Schur	84
13.2.2 El teorema fundamental de ortoganilidad	84
13.2.3 Carácter	85
13.3 La relación con la mecánica cuántica	85
13.3.1 Representations, energy levels and degeneracy	85
13.3.2 Breaking of degeneracy by a perturbation	85
13.3.3 La construccin de una base de funciones	86
13.3.4 The direct product of representations	86
13.3.5 Clebsch-Gordan coefficients	86
13.3.6 Symmetric transformations of operators, irreducible tensor operators	87
13.3.7 The Wigner-Eckart theorem	87
13.4 Continuous groups	87
13.4.1 The 3-dimensional translation group	88
13.4.2 The 3-dimensional rotation group	88
13.4.3 Properties of continuous groups	88
13.5 The group SO(3)	89
13.6 Aplicaciones de la mecánica cuántica	90
13.6.1 Modelo de vectores en la adicción del momento angular	90
13.6.2 Operadores tensoriales irreducibles, elementos de matriz y reglas de selección	90
13.7 Applications to particle physics	91
14 Física nuclear	93
14.1 Fuerzas nucleares	93
14.2 La forma del núcleo	94
14.3 Decaimiento radiactivo	94
14.4 Esparcimiento y reacciones nucleares	95
14.4.1 Modelo cinético	95
14.4.2 Modelo mecánico cuántico para esparcimiento n-p	95
14.4.3 Conservación de la energía y momentum en reacciones nucleares	96
14.5 Dosimetría de radiación	96
15 Teoría de campo cuántica & Física de partículas	99
15.1 Operadores de creación y aniquilación	99
15.2 Campos clásicos y cuánticos	99
15.3 El marco de interacción	100
15.4 campo escalar real en el marco de interacción	100
15.5 Partículas cargadas de spin-0, conservación de la carga	101
15.6 Funciones de campo para partículas de spin- $\frac{1}{2}$	101
15.7 Cuantización de campos de spin- $\frac{1}{2}$	102
15.8 Cuantización del campo electromagnético	103
15.9 Interacción de campos y la matriz S	104
15.10 Divergencias y renormailizacion	105
15.11 Classification of elementary particles	105
15.12 violacion P y violacion CP	107
15.13 The standard model	107
15.13.1 The electroweak theory	108
15.13.2 Spontaneous symmetry breaking: the Higgs mechanism	108

15.13.3 Quantumchromodynamics	109
15.14 Path integrals	109
15.15 Unificación y gravedad cuántica	110
16 Astrophysics	111
16.1 Determination of distances	111
16.2 Brightness and magnitudes	111
16.3 Radiation and stellar atmospheres	112
16.4 Composition and evolution of stars	112
16.5 Energy production in stars	113
The ∇-operator	114
The SI units	115

Constantes físicas

Nombre	Símbolo	Valor	Unidad
Numero π	π	3.14159265358979323846	
Numero e	e	2.71828182845904523536	
Constante de Euler	$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n 1/k - \ln(n) \right)$	0.5772156649	
Carga elemental	e	$1.60217733 \cdot 10^{-19}$	C
Constante gravitacional	G, κ	$6.67259 \cdot 10^{-11}$	$\text{m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$
Constante de estructura fina	$\alpha = e^2/2hc\varepsilon_0$	$\approx 1/137$	
Velocidad de la luz en el vacío	c	$2.99792458 \cdot 10^8$	m/s (def)
Permitividad del vacío	ε_0	$8.854187 \cdot 10^{-12}$	F/m
Permeabilidad del vacío	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$	H/m
$(4\pi\varepsilon_0)^{-1}$		$8.9876 \cdot 10^9$	Nm^2C^{-2}
Constante de Planck	h	$6.6260755 \cdot 10^{-34}$	Js
Constante de Dirac	$\hbar = h/2\pi$	$1.0545727 \cdot 10^{-34}$	Js
Magneton de Bohr	$\mu_B = e\hbar/2m_e$	$9.2741 \cdot 10^{-24}$	Am^2
Radio de Bohr	a_0	0.52918	Å
Constante de Rydberg	Ry	13.595	eV
Longitud de onda de un electrón de	$\lambda_{Ce} = h/m_e c$	$2.2463 \cdot 10^{-12}$	m
Longitud de onda de próton de Compton	$\lambda_{Cp} = h/m_p c$	$1.3214 \cdot 10^{-15}$	m
Masa reducida de un átomo de H	μ_H	$9.1045755 \cdot 10^{-31}$	kg
Constante de Stefan-Boltzmann	σ	$5.67032 \cdot 10^{-8}$	$\text{Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$
Constante de Wien	k_W	$2.8978 \cdot 10^{-3}$	mK
Constante Molar	R	8.31441	$\text{J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
Constante de Avogadro	N_A	$6.0221367 \cdot 10^{23}$	mol^{-1}
Constante de Boltzmann	$k = R/N_A$	$1.380658 \cdot 10^{-23}$	J/K
Masa del electrón	m_e	$9.1093897 \cdot 10^{-31}$	kg
Masa del Proton	m_p	$1.6726231 \cdot 10^{-27}$	kg
Masa del Neutron	m_n	$1.674954 \cdot 10^{-27}$	kg
Masa del Elementary mass unit	$m_u = \frac{1}{12}m(^{12}_6\text{C})$	$1.6605656 \cdot 10^{-27}$	kg
Magneton nuclear	μ_N	$5.0508 \cdot 10^{-27}$	J/T
Diametro del Sol	D_\odot	$1392 \cdot 10^6$	m
Masa del Sol	M_\odot	$1.989 \cdot 10^{30}$	kg
Periodo de rotación del Sol	T_\odot	25.38	days
Radio de la Tierra	R_A	$6.378 \cdot 10^6$	m
Masa de la Tierra	M_A	$5.976 \cdot 10^{24}$	kg
Periodo rotacional de la Tierra	T_A	23.96	hours
Periodo orbital de la Tierra	Tropical year	365.24219879	days
Unidad astronómica	AU	$1.4959787066 \cdot 10^{11}$	m
Año luz	lj	$9.4605 \cdot 10^{15}$	m
Parsec	pc	$3.0857 \cdot 10^{16}$	m
Constante de Hubble	H	$\approx (75 \pm 25)$	$\text{km}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{Mpc}^{-1}$

Chapter 1

Mecánica

1.1 Cinemática de una partícula puntual en un sistema de coordenadas fijo

1.1.1 Definiciones

La posición \vec{r} , la velocidad \vec{v} y la aceleración \vec{a} son definidas por: $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, $\vec{a} = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$. Por consiguiente:

$$s(t) = s_0 + \int |\vec{v}(t)| dt ; \quad \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int \vec{v}(t) dt ; \quad \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int \vec{a}(t) dt$$

Cuando la aceleración es constante, encontramos: $v(t) = v_0 + at$ y $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$.
Para los vectores unitarios en la dirección \perp respecto a la órbita \vec{e}_t y paralelos respecto a \vec{e}_n tenemos:

$$\vec{e}_t = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{d\vec{r}}{ds} \quad \dot{\vec{e}}_t = \frac{v}{\rho} \vec{e}_n ; \quad \vec{e}_n = \frac{\dot{\vec{e}}_t}{|\dot{\vec{e}}_t|}$$

Para la *curvatura* k y el *radio de curvatura* ρ encontramos:

$$\vec{k} = \frac{d\vec{e}_t}{ds} = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \left| \frac{d\varphi}{ds} \right| ; \quad \rho = \frac{1}{|k|}$$

1.1.2 Coordenadas polares

Las coordenadas polares son definidas por: $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$. De tal modo, para el sistema de vectores unitarios: $\dot{\vec{e}}_r = \dot{\theta} \vec{e}_\theta$, $\dot{\vec{e}}_\theta = -\dot{\theta} \vec{e}_r$.

La velocidad y la aceleración son derivados de: $\vec{r} = r \vec{e}_r$, $\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$, $\vec{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \vec{e}_\theta$.

1.2 Movimiento relativo

Para el movimiento de un punto D a un punto Q, tenemos: $\vec{r}_D = \vec{r}_Q + \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_Q}{\omega^2}$ con $\vec{QD} = \vec{r}_D - \vec{r}_Q$ y $\omega = \dot{\theta}$.

Luego se obtiene: $\alpha = \ddot{\theta}$. ' significa que la cantidad en un sistema de coordenadas en movimiento. En un sistema en movimiento se tiene:

$$\vec{v} = \vec{v}_Q + \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}' \quad \text{y} \quad \vec{a} = \vec{a}_Q + \vec{a}' + \vec{\alpha} \times \vec{r}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \\ \text{with } \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = -\omega^2 \vec{r}'_n$$

1.3 Dinámica puntual de un sistema de coordenadas fijo

1.3.1 Fuerza, (angular)momentum y energía

La segunda ley de Newton relaciona la fuerza de un objeto y la aceleración resultante de un objeto donde el *momentum* es dado por

$\vec{p} = m\vec{v}$:

$$\vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{dm}{dt} \stackrel{m=\text{const}}{=} m\vec{a}$$

La tercera ley de Newton es dada por: $\vec{F}_{\text{accion}} = -\vec{F}_{\text{reaccion}}$.

Para la potencia P tenemos: $P = \dot{W} = \vec{F} \cdot \vec{v}$. Para la energía total W , la energía cinética T y la energía potencial U tenemos: $W = T + U$; $\dot{T} = -\dot{U}$ tal que $T = \frac{1}{2}mv^2$.

el impulso \vec{S} es: $\vec{S} = \Delta\vec{p} = \int \vec{F} dt$

El trabajo A , realizado por una fuerza, es $A = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_1^2 F \cos(\alpha) ds$

La torca $\vec{\tau}$ es relacionada a el momento angular \vec{L} : $\vec{\tau} = \dot{\vec{L}} = \vec{r} \times \vec{F}$; y $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{v} \times \vec{r}$, $|\vec{L}| = mr^2\omega$. La siguiente ecuación es valida:

$$\tau = -\frac{\partial U}{\partial \theta}$$

Luego, las condiciones del equilibrio mecánico son: $\sum \vec{F}_i = 0$ y $\sum \vec{\tau}_i = 0$.

La *fuerza de fricción* es usualmente proporcional a la fuerza perpendicular a la superficie, excepto cuando el movimiento comienza, cuando el umbral tiene que ser superado: $F_{\text{fric}} = f \cdot F_{\text{norm}} \cdot \vec{e}_t$.

1.3.2 Campos de fuerza conservativa

Una fuerza conservativa puede ser escrita como el gradiente de un potencial: $\vec{F}_{\text{cons}} = -\vec{\nabla}U$. En otras palabras, $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$. Para tal campo de fuerza encontramos que:

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0 \Rightarrow U = U_0 - \int_{r_0}^{r_1} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Es decir, el trabajo realizado por un campo de fuerza conservativa no depende de la trayectoria, solamente depende del punto inicial y el punto final del movimiento.

1.3.3 Gravitación

La ley de gravitación newtoniana es (en GRT se utiliza κ en lugar de G):

$$\vec{F}_g = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{e}_r$$

Luego, el potencial gravitatorio es dado por $V = -Gm/r$. Por la ley de Gauss tenemos que: $\nabla^2 V = 4\pi G\rho$.

1.3.4 Ecuaciones de orbitas

Si $V = V(r)$ podemos derivar de la ecuación de Lagrange para ϕ la conservación de impulso angular:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\phi}) = 0 \Rightarrow L_z = mr^2\dot{\phi} = \text{constant}$$

Para la posición radial como función del tiempo puede escribirse:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2(W - V)}{m} - \frac{L^2}{m^2 r^2}$$

La ecuación angular es entonces:

$$\phi - \phi_0 = \int_0^r \left[\frac{mr^2}{L} \sqrt{\frac{2(W-V)}{m} - \frac{L^2}{m^2 r^2}} \right]^{-1} dr \stackrel{r^{-2}_{\text{field}}}{=} \arccos \left(1 + \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}}{\frac{1}{r_0} + km/L_z^2} \right)$$

Si $F = F(r)$: $L = \text{constante}$, si F es conservativa: $W = \text{constante}$, si $\vec{F} \perp \vec{v}$ entonces $\Delta T = 0$ y $U = 0$.

Ecuaciones de Kepler para orbitas

En un campo de fuerzas $F = kr^{-2}$, Las orbitas son secciones cónicas con el origen de la fuerza en uno de los focos (primera ley de Kepler). La ecuación de la orbita es:

$$r(\theta) = \frac{\ell}{1 + \varepsilon \cos(\theta - \theta_0)}, \quad \text{or: } x^2 + y^2 = (\ell - \varepsilon x)^2$$

con

$$\ell = \frac{L^2}{G\mu^2 M_{\text{tot}}}; \quad \varepsilon^2 = 1 + \frac{2WL^2}{G^2\mu^3 M_{\text{tot}}^2} = 1 - \frac{\ell}{a}; \quad a = \frac{\ell}{1 - \varepsilon^2} = \frac{k}{2W}$$

a Es la mitad de la longitud a lo largo del eje de la orbita elíptica en caso de la orbita sea cerrada. La mitad de la longitud del eje corto es $b = \sqrt{a\ell}$. ε es la *excentricidad* de la orbita. Las orbitas con una misma excentricidad, ε , son iguales en forma. Ahora, sólo 5 tipos de orbitas son posibles:

1. $k < 0$ y $\varepsilon = 0$: un círculo.
2. $k < 0$ y $0 < \varepsilon < 1$: una elipse.
3. $k < 0$ y $\varepsilon = 1$: una parábola.
4. $k < 0$ y $\varepsilon > 1$: una hipérbola, con concavidad dirigida hacia el centro de la fuerza.
5. $k > 0$ y $\varepsilon > 1$: una hipérbola, con concavidad dirigida en sentido al centro de la fuerza.

Otras combinaciones no son posibles: La energía total en un campo de fuerza repulsiva es siempre positiva, de modo que $\varepsilon > 1$.

Si la superficie entre la orbita cubierto entre t_1 y t_2 y el foco C alrededor de que el planeta se mueve como $A(t_1, t_2)$, la segunda ley de Kepler es

$$A(t_1, t_2) = \frac{L_C}{2m}(t_2 - t_1)$$

La tercer ley de Kepler es, con T el periodo y M_{tot} la masa total de el sistema:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_{\text{tot}}}$$

1.3.5 El teorema virial

El teorema virial para una partícula es:

$$\langle m\vec{v} \cdot \vec{r} \rangle = 0 \Rightarrow \langle T \rangle = -\frac{1}{2} \langle \vec{F} \cdot \vec{r} \rangle = \frac{1}{2} \left\langle r \frac{dU}{dr} \right\rangle = \frac{1}{2} n \langle U \rangle \quad \text{if } U = -\frac{k}{r^n}$$

Generalizando, el teorema virial para una colección de partículas es:

$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \left\langle \sum_{\text{partículas}} \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i + \sum_{\text{pares}} \vec{F}_{ij} \cdot \vec{r}_{ij} \right\rangle$$

Asi mismo, estas últimas preposiciones pueden escribirse como: $2E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = 0$.

1.4 La dinámica de una partícula puntal en un sistema coordinado en movimiento

1.4.1 Fuerzas aparentes

La fuerza total en un sistema coordinado en movimiento puede ser encontrado al sustraer las fuerzas aparentes que actúan en el marco de referencia: $\vec{F}' = \vec{F} - \vec{F}_{\text{app}}$. Identificamos como fuerzas aparentes a las siguientes:

1. Transformación del origen: $F_{\text{or}} = -m\vec{a}_a$
2. Rotación: $\vec{F}_\alpha = -m\vec{\alpha} \times \vec{r}'$
3. Fuerza de Coriolis: $F_{\text{cor}} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}$
4. Fuerza centrífuga: $\vec{F}_{\text{cf}} = m\omega^2 \vec{r}_n' = -\vec{F}_{\text{cp}} ; \vec{F}_{\text{cp}} = -\frac{mv^2}{r} \vec{e}_r$

1.4.2 Notación para tensores

Por medio de la transformación de las ecuaciones de Newton para el movimiento $x^\alpha = x^\alpha(x)$ resulta en:

$$\frac{dx^\alpha}{dt} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\beta} \frac{d\bar{x}^\beta}{dt};$$

La regla de la cadena nos muestra que:

$$\frac{d}{dt} \frac{dx^\alpha}{dt} = \frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\beta} \frac{d\bar{x}^\beta}{dt} \right) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\beta} \frac{d^2 \bar{x}^\beta}{dt^2} + \frac{d\bar{x}^\beta}{dt} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\beta} \right)$$

Luego:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\beta} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\gamma} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\beta} \frac{d\bar{x}^\gamma}{dt} = \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \bar{x}^\beta \partial \bar{x}^\gamma} \frac{d\bar{x}^\gamma}{dt}$$

Por tanto:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\beta} \frac{d^2 \bar{x}^\beta}{dt^2} + \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \bar{x}^\beta \partial \bar{x}^\gamma} \frac{d\bar{x}^\gamma}{dt} \left(\frac{d\bar{x}^\beta}{dt} \right)$$

De este modo, la ecuación newtoniana para el movimiento

$$m \frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} = F^\alpha$$

Se transforma en:

$$m \left\{ \frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{dt} \frac{dx^\gamma}{dt} \right\} = F^\alpha$$

Las fuerzas aparentes son tomadas desde el origen: $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{dt} \frac{dx^\gamma}{dt}$.

1.5 Dinámica de una colección de masas puntuales

1.5.1 El centro de masa

La velocidad del centro de masa \vec{R} es dado por $\vec{v} - \dot{\vec{R}}$. Las coordenadas del centro de masa son:

$$\vec{r}_m = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$$

En un sistema de dos partículas, las coordenadas del centro de masa se escribe como:

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

Con $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, la energía cinética se convierte en: $T = \frac{1}{2}M_{\text{tot}}\dot{R}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2$, con la *masa reducida* μ es dado por: $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$

El movimiento adentro y afuera de centro de masa puede ser separado:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{L}}_{\text{afuera}} &= \vec{\tau}_{\text{afuera}} ; & \dot{\vec{L}}_{\text{adentro}} &= \vec{\tau}_{\text{adentro}} \\ \vec{p} &= m\vec{v}_{\text{m}} ; & \vec{F}_{\text{ext}} &= m\vec{a}_{\text{m}} ; & \vec{F}_{12} &= \mu\vec{u}\end{aligned}$$

1.5.2 Colisiones

Consideremos que existe un sistema coordenado y una posición arbitraria C, tenemos: $\vec{p} = m\vec{v}_{\text{m}}$ es constante, y $T = \frac{1}{2}m\vec{v}_{\text{m}}^2$ es constante. Los cambios en la *velocidad relativa* son descritos por: $\vec{S} = \Delta\vec{p} = \mu(\vec{v}_{\text{aft}} - \vec{v}_{\text{before}})$. Obtenemos $\Delta\vec{L}_C = \vec{C}\vec{B} \times \vec{S}$, $\vec{p} \parallel \vec{S}$ = constante y \vec{L} w.r.t. B es constante.

1.6 Dinámica de cuerpos rígidos

1.6.1 Momento de inercia

El momento angular en un sistema de coordenadas movimiento es dado por:

$$\vec{L}' = I\vec{\omega} + \vec{L}'_n$$

donde I es el *momento de inercia* con respecto al eje central, que es dado por:

$$I = \sum_i m_i \vec{r}_i^2 ; \quad T' = W_{\text{rot}} = \frac{1}{2}\omega I_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j = \frac{1}{2}I\omega^2$$

o, en el caso continuo:

$$I = \frac{m}{V} \int r_n'^2 dV = \int r_n'^2 dm$$

desarrollando tenemos:

$$L_i = I^{ij}\omega_j ; \quad I_{ii} = I_i ; \quad I_{ij} = I_{ji} = - \sum_k m_k x'_i x'_j$$

El teorema de Steiner es: $I_{\text{w.r.t.D}} = I_{\text{w.r.t.C}} + m(DM)^2$ si el eje si el eje C es paralelo al eje D; es decir $C \parallel D$.

Objeto	I	Objeto	I
Cilindro hueco	$I = mR^2$	Cilindro masivo	$I = \frac{1}{2}mR^2$
Disco, su eje de giro es atravesz del disco	$I = \frac{1}{4}mR^2$	Halter	$I = \frac{1}{2}\mu R^2$
Esfera hueca	$I = \frac{2}{3}mR^2$	Esfera masiva	$I = \frac{2}{5}mR^2$
Barra, eje \perp a traves c.o.m.	$I = \frac{1}{12}ml^2$	Barra, eje \perp through end	$I = \frac{1}{3}ml^2$
Rectangulo, eje \perp plano a traves. c.o.m.	$I = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$	Rectangle, axis \parallel b thr. m	$I = ma^2$

1.6.2 Ejes principales

Cada cuerpo rígido cuenta con, al menos tres, ejes principales; los cuales están perpendiculares uno al otro. Para un eje principal tenemos:

$$\frac{\partial I}{\partial \omega_x} = \frac{\partial I}{\partial \omega_y} = \frac{\partial I}{\partial \omega_z} = 0 \quad \text{so} \quad L'_n = 0$$

Por lo anterior tenemos: $\dot{\omega}_k = -a_{ijk}\omega_i\omega_j$ con $a_{ijk} = \frac{I_i - I_j}{I_k}$ si $I_1 \leq I_2 \leq I_3$.

1.6.3 Dependencia con el tiempo

Para una torca $\vec{\tau}$ obtenemos:

$$\vec{\tau}' = I\ddot{\theta} ; \quad \frac{d''\vec{L}'}{dt} = \vec{\tau}' - \vec{\omega} \times \vec{L}'$$

La torca \vec{T} es definida por: $\vec{T} = \vec{F} \times \vec{d}$.

1.7 Calculo variacional, mecánica de Hamilton y Lagrange

1.7.1 Calculo variacional

Comenzamos con:

$$\delta \int_a^b \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt = 0 \quad \text{with} \quad \delta(a) = \delta(b) = 0 \quad \text{and} \quad \delta \left(\frac{du}{dx} \right) = \frac{d}{dx}(\delta u)$$

Las ecuaciones de Lagrange pueden ser derivadas:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$$

Cuando hay condiciones adicionales aplicadas a los problemas variacionales $\delta J(u) = 0$ de un tipo $K(u) = \text{constante}$, el nuevo problema se convierte: $\delta J(u) - \lambda \delta K(u) = 0$.

1.7.2 Mecánica de Hamilton

El *Lagrangiano* es dado por: $\mathcal{L} = \sum T(\dot{q}_i) - V(q_i)$. El *Hamiltoniano* es dado por: $H = \sum \dot{q}_i p_i - \mathcal{L}$. En 2 dimensiones tenemos: $\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - U(r, \phi)$.

Si empleamos *coordenadas canonicas* las ecuaciones de Hamilton son las ecuaciones de movimiento del sistema:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} ; \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

Las coordenadas son canonicas si cumplen con: $\{q_i, q_j\} = 0$, $\{p_i, p_j\} = 0$, $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$ donde $\{, \}$ es el *bracket de Poisson*:

$$\{A, B\} = \sum_i \left[\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right]$$

El Hamiltoniano de un oscilador armónico es $H(x, p) = p^2/2m + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$. Con nuevas coordenadas (θ, I) , Obtenidas por la transformación canónica $x = \sqrt{2I/m\omega} \cos(\theta)$ y $p = -\sqrt{2Im\omega} \sin(\theta)$, con el inversa $\theta = \arctan(-p/m\omega x)$ and $I = p^2/2m\omega + \frac{1}{2}m\omega x^2$ se obtiene: $H(\theta, I) = \omega I$.

el Hamiltoniano de una partícula cargada con carga q en un campo electromagnético externo es:

$$H = \frac{1}{2m} (\vec{p} - q\vec{A})^2 + qV$$

Este Hamiltoniano puede ser derivado del Hamiltoniano de una partícula libre $H = p^2/2m$ con las transformaciones $\vec{p} \rightarrow \vec{p} - q\vec{A}$ y $H \rightarrow H - qV$. Esta es una elegante forma de un punto de vista relativístico: ésto es equivalente a la transformación del momentum de cuatro vectores $p^\alpha \rightarrow p^\alpha - qA^\alpha$. Una transformación de norma sobre los potenciales A^α corresponde con una transformación canónica, que hacen las ecuaciones de Hamilton de movimiento para el sistema.

1.7.3 Movimiento alrededor del equilibrio, linealización

Para sistemas naturales alrededor del equilibrio las siguientes ecuaciones son validas:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_0 = 0 ; \quad V(q) = V(0) + V_{ik}q_iq_k \quad \text{with} \quad V_{ik} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_k}\right)_0$$

Con $T = \frac{1}{2}(M_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k)$ se recibe un conjunto de ecuaciones $M\ddot{q} + Vq = 0$. If $q_i(t) = a_i \exp(i\omega t)$ es sustituida, este conjunto de ecuaciones tiene soluciones si $\det(V - \omega^2 M) = 0$. Esto conlleva a un problema de eigen-frecuencias: $\omega_k^2 = \frac{a_k^T V a_k}{a_k^T M a_k}$. Si el equilibrio es estable se tiene: $\forall k$ that $\omega_k^2 > 0$. La solucion general es una superposición de ingen-vibraciones.

1.7.4 Espacion de fase, ecuación de Liouville

En el espacio fase se tiene:

$$\nabla = \left(\sum_i \frac{\partial}{\partial q_i}, \sum_i \frac{\partial}{\partial p_i} \right) \quad \text{so} \quad \nabla \cdot \vec{v} = \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right)$$

Si la ecuación de continuidad, $\partial_t \varrho + \nabla \cdot (\varrho \vec{v}) = 0$ Obteniendo, esto puede ser escrito como:

$$\{\varrho, H\} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0$$

Para una cantidad arbitraria A se tiene:

$$\frac{dA}{dt} = \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t}$$

El teorema de Liouville puede ser escrito como:

$$\frac{d\varrho}{dt} = 0 ; \quad \text{or:} \quad \int p dq = \text{constante}$$

1.7.5 Funciones generadoras

Comenzando con una transformación de coordenadas:

$$\begin{cases} Q_i = Q_i(q_i, p_i, t) \\ P_i = P_i(q_i, p_i, t) \end{cases}$$

podemos derivar el siguientes ecuaciones de Hamilton por medio de un nuevo hamiltoninano K :

$$\frac{dQ_i}{dt} = \frac{\partial K}{\partial P_i} ; \quad \frac{dP_i}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}$$

Ahora, una distinción entre los cuatro casos se puede realizar:

1. If $p_i\dot{q}_i - H = P_iQ_i - K(P_i, Q_i, t) - \frac{dF_1(q_i, Q_i, t)}{dt}$, de modo que tenemos:

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} ; \quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} ; \quad K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

2. If $p_i\dot{q}_i - H = -\dot{P}_iQ_i - K(P_i, Q_i, t) + \frac{dF_2(q_i, P_i, t)}{dt}$, las coordenadas siguen que:

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} ; \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} ; \quad K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

3. If $-\dot{p}_i q_i - H = P_i \dot{Q}_i - K(P_i, Q_i, t) + \frac{dF_3(p_i, Q_i, t)}{dt}$, las coordenadas siguen que:

$$q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i} ; \quad P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i} ; \quad K = H + \frac{\partial F_3}{\partial t}$$

4. If $-\dot{p}_i q_i - H = -P_i \dot{Q}_i - K(P_i, Q_i, t) + \frac{dF_4(p_i, P_i, t)}{dt}$, las coordenadas siguen que:

$$q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i} ; \quad Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i} ; \quad K = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}$$

Las funciones F_1 , F_2 , F_3 y F_4 son llamadas *funciones generadoras*.

Chapter 2

Electricidad y Magnetismo

2.1 Las ecuaciones de Maxwell

Los campos electromagnéticos clásicos pueden ser descritos por medio de las *ecuaciones de Maxwell*. Las que pueden ser escritas de modo diferencial e integral:

$$\begin{aligned} \oint (\vec{D} \cdot \vec{n}) d^2 A &= Q_{\text{libre, incluido}} & \nabla \cdot \vec{D} &= \rho_{\text{libre}} \\ \oint (\vec{B} \cdot \vec{n}) d^2 A &= 0 & \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} &= -\frac{d\Phi}{dt} & \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \oint \vec{H} \cdot d\vec{s} &= I_{\text{libre, incluido}} + \frac{d\Psi}{dt} & \nabla \times \vec{H} &= \vec{J}_{\text{libre}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned}$$

Para un flujo se tiene: $\Psi = \iint (\vec{D} \cdot \vec{n}) d^2 A$, $\Phi = \iint (\vec{B} \cdot \vec{n}) d^2 A$.

Para la intensidad del desplazamiento eléctrico \vec{D} , la polarización \vec{P} y el campo eléctrico \vec{E} dependen de uno del otro de acuerdo con:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}, \quad \vec{P} = \sum \vec{p}_0 / \text{Vol}, \quad \varepsilon_r = 1 + \chi_e, \quad \text{con } \chi_e = \frac{np_0^2}{3\varepsilon_0 kT}$$

La intensidad del campo magnético \vec{H} , la magnetización \vec{M} y la densidad del flujo magnético \vec{B} dependen uno del otro de acuerdo con:

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 \mu_r \vec{H}, \quad \vec{M} = \sum \vec{m} / \text{Vol}, \quad \mu_r = 1 + \chi_m, \quad \text{con } \chi_m = \frac{\mu_0 n m_0^2}{3kT}$$

2.2 Fuerza y potencial

La fuerza y el campo eléctrico entre dos cargas puntuales es descrito por:

$$\vec{F}_{12} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r r^2} \vec{e}_r; \quad \vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q}$$

La fuerza de Lorentz es la fuerza que es experimentada por una partícula carga que se mueve a través de un campo magnético. El origen de esta fuerza es una transformación relativística de la fuerza de Coulomb: $\vec{F}_L = Q(\vec{v} \times \vec{B}) = l(\vec{I} \times \vec{B})$.

El campo magnético en un punto P que resulta de una corriente eléctrica es dado por la *ley de Biot-Savart*, conocida también como la ley de Laplace. Aquí, $d\vec{l} \parallel \vec{I}$ y \vec{r} points from $d\vec{l}$ to P :

$$d\vec{B}_P = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} d\vec{l} \times \vec{e}_r$$

Si la corriente es dependiente del tiempo, se debe tomar en cuenta *el tiempo de retardo*: la sustitución $I(t) \rightarrow I(t - r/c)$ debe ser aplicada.

Los potenciales están dados por: $V_{12} = -\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{s}$ y $\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r}$.

Aquí, existe libertad para aplicar una *transformación de norma* (conocida en ingles como *gauge transformation*). Los campos pueden ser derivados de los potenciales mediante:

$$\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

Desarrollando se obtiene la relación: $c^2 \vec{B} = \vec{v} \times \vec{E}$.

2.3 Transformaciones de norma

Los potenciales de los campos electromagnéticos se les aplican una transformación de norma:

$$\begin{cases} \vec{A}' = \vec{A} - \nabla f \\ V' = V + \frac{\partial f}{\partial t} \end{cases}$$

Así los campos \vec{E} y \vec{B} no cambian. Ésto resulta en una transformación canónica del hamiltoniano. Entonces, los grados de libertad permanecen. Dos comunes normas son:

1. Norma de Lorentz: $\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$. Ésto separa las ecuaciones diferenciales para \vec{A} y V : $\square V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$, $\square \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$.
2. Norma Coulomb: $\nabla \cdot \vec{A} = 0$. If $\rho = 0$ y $\vec{J} = 0$ obteniendo $V = 0$ y siguiendo \vec{A} de $\square \vec{A} = 0$.

2.4 Energía de un campo electromagnético

La densidad de energía de un campo electromagnético es:

$$\frac{dW}{dVol} = w = \int H dB + \int E dD$$

La densidad de energía puede ser expresada en los potenciales y las corrientes de la siguiente manera:

$$w_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \int \vec{J} \cdot \vec{A} d^3x, \quad w_{\text{el}} = \frac{1}{2} \int \rho V d^3x$$

2.5 Ondas electromagnéticas

2.5.1 Ondas electromagnéticas en el vacío

La ecuación de onda $\square \Psi(\vec{r}, t) = -f(\vec{r}, t)$ presenta una solución general, con $c = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \int \frac{f(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

Si este es escrito como: $\vec{J}(\vec{r}, t) = \vec{J}(\vec{r}) \exp(-i\omega t)$ y $\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}(\vec{r}) \exp(-i\omega t)$ con:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int \vec{J}(\vec{r}') \frac{\exp(ik|\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r', \quad V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \rho(\vec{r}') \frac{\exp(ik|\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

Una derivación vía una expansión multipolar muestra que para la energía radiante es invariante, si $d, \lambda \gg r$:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{k^2}{32\pi^2\epsilon_0 c} \left| \int J_{\perp}(\vec{r}') e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3r' \right|^2$$

La densidad de energía de una onda electromagnética de un dipolo vibrante a una distancia larga es:

$$w = \varepsilon_0 E^2 = \frac{p_0^2 \sin^2(\theta) \omega^4}{16\pi^2 \varepsilon_0 r^2 c^4} \sin^2(kr - \omega t), \quad \langle w \rangle_t = \frac{p_0^2 \sin^2(\theta) \omega^4}{32\pi^2 \varepsilon_0 r^2 c^4}, \quad P = \frac{ck^4 |\vec{p}|^2}{12\pi \varepsilon_0}$$

La energía irradiada puede ser derivada del *vector de Poynting* \vec{S} : $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = cW\vec{e}_v$. La *irradiancia* es el promedio temporal del vector del Poynting: $I = \langle |\vec{S}| \rangle_t$. La presión de radiación p_s es descrita por $p_s = (1 + R)|\vec{S}|/c$, donde R es el coeficiente de reflexión.

2.5.2 Ondas electromagnéticas en la materia

La ecuación de onda en la materia, con $c_{\text{mat}} = (\varepsilon\mu)^{-1/2}$ es la velocidad de la luz en la materia, son:

$$\left(\nabla^2 - \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} \right) \vec{E} = 0, \quad \left(\nabla^2 - \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} \right) \vec{B} = 0$$

dado, después de la sustitución de la onda monocromática plana: $\vec{E} = E \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t))$ y $\vec{B} = B \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t))$ la relación de la dispersión:

$$k^2 = \varepsilon\mu\omega^2 + \frac{i\mu\omega}{\rho}$$

El primer término aparece debido a la corriente de desplazamiento, la segunda forma de la corriente de conductancia. Si k es escrito en la forma $k := k' + ik''$, se tiene que:

$$k' = \omega \sqrt{\frac{1}{2}\varepsilon\mu} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{(\rho\varepsilon\omega)^2}}} \quad \text{and} \quad k'' = \omega \sqrt{\frac{1}{2}\varepsilon\mu} \sqrt{-1 + \sqrt{1 + \frac{1}{(\rho\varepsilon\omega)^2}}}$$

Este resultado muestra una onda amortiguada: $\vec{E} = E \exp(-k''\vec{n} \cdot \vec{r}) \exp(i(k'\vec{n} \cdot \vec{r} - \omega t))$. Si el material es un buen conductor, si la onda se desvanece después de una longitud de onda, aproximadamente,

$$k = (1 + i) \sqrt{\frac{\mu\omega}{2\rho}}.$$

2.6 Multipolos

Porque $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} \sum_0^\infty \left(\frac{r'}{r} \right)^l P_l(\cos \theta)$ el potencial puede ser escrito como: $V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \sum_n \frac{k_n}{r^n}$

Para los términos de menor orden resulta en:

- Monopolo: $l = 0$, $k_0 = \int \rho dV$
- Dipolo: $l = 1$, $k_1 = \int r \cos(\theta) \rho dV$
- Cuadrupolo: $l = 2$, $k_2 = \frac{1}{2} \sum_i (3z_i^2 - r_i^2)$

1. El dipolo eléctrico: el impulso dipolar: $\vec{p} = Ql\vec{e}$, donde \vec{e} va de \oplus hasta \ominus , y $\vec{F} = (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E}_{\text{ext}}$, y $W = -\vec{p} \cdot \vec{E}_{\text{out}}$.

Campo electrico: $\vec{E} \approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^3} \left(\frac{3\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^2} - \vec{p} \right)$. la torca es: $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}_{\text{out}}$

2. El dipolo magnético: el impulso dipolar: si $r \gg \sqrt{A}$: $\vec{\mu} = \vec{I} \times (A\vec{e}_\perp)$, $\vec{F} = (\vec{\mu} \cdot \nabla) \vec{B}_{\text{out}}$

$|\mu| = \frac{mv_\perp^2}{2B}$, $W = -\vec{\mu} \times \vec{B}_{\text{out}}$

Campo magnetico: $\vec{B} = \frac{-\mu}{4\pi r^3} \left(\frac{3\vec{\mu} \cdot \vec{r}}{r^2} - \vec{\mu} \right)$. El momento es: $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}_{\text{out}}$

2.7 Corrientes eléctricas

La ecuación de continuidad para cargas eléctricas es: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0$. La *corriente eléctrica* es dada por:

$$I = \frac{dQ}{dt} = \iint (\vec{J} \cdot \vec{n}) d^2 A$$

Para la mayoría de los conductores: $\vec{J} = \vec{E}/\rho$, donde ρ es la *resistividad*.

Si el flujo encerrado en un conductor cambia esto resulta en un *voltaje inducido* $V_{\text{ind}} = -N \frac{d\Phi}{dt}$. Si la corriente fluyendo a través un conductor cambia, esto resulta en una auto inductancia que se opone al cambio original: $V_{\text{autoind}} = -L \frac{dI}{dt}$. Si el conducto encierra un flujo Φ tal que: $\Phi = LI$.

La inducción magnética con una espira es aproximadamente: $B = \frac{\mu NI}{\sqrt{l^2 + 4R^2}}$ donde l es la longitud, R el radio y N es el numero de espiras. la energía contenida dentro de la espira es dada por $W = \frac{1}{2} LI^2$ y $L = \mu N^2 A/l$.

La *capacitancia* es definida por: $C = Q/V$. Para un capacitor o condensador se tiene: $C = \epsilon_0 \epsilon_r A/d$ donde d es la distancia entre las placas y A la superficie de una de las placas. La intensidad del campo eléctrico entre la placa es $E = \sigma/\epsilon_0 = Q/\epsilon_0 A$ donde σ es la carga superficial. La cantidad energía acumulada es determinada por medio de $W = \frac{1}{2} CV^2$. La corriente a través de una capacitancia es dada por $I = -C \frac{dV}{dt}$.

Para la mayoría de las resistencia PTC es aproximadamente: $R = R_0(1 + \alpha T)$, donde $R_0 = \rho l/A$. Para un NTC es: $R(T) = C \exp(-B/T)$ donde B y C depende únicamente del material.

Si la corriente fluye a través de dos diferentes conductores conectados x y y , el área de contacto se calienta o se enfría, dependiendo de la dirección de la corriente: el *efecto Peltier*. El calor generado o removido es determinado por: $W = \Pi_{xy} I t$. Este efecto puede ser amplificado mediante semiconductores.

El *voltaje térmico* entre dos metales dos metales es descrito por: $V = \gamma(T - T_0)$. Para una conexión de Cu-Konstantane se tiene: $\gamma \approx 0.2 - 0.7$ mV/K.

En una red eléctrica con corrientes estacionarias, *Las ecuaciones de Kirchhoff* se pueden aplicar: para un nodo se tiene: $\sum I_n = 0$, a lo largo de un camino cerrado, se obtiene: $\sum V_n = \sum I_n R_n = 0$.

2.8 Campos depolarizados

Si un material dieléctrico es colocado en un campo eléctrico o magnético, la intensidad del campo dentro de afuera del material cambiara porque el material se polarizara o magnetizara. Si el medio tiene una forma elipsoide y uno de sus ejes principales es paralelo con el campo externo \vec{E}_0 or \vec{B}_0 entonces la despolarización es un campo homogéneo.

$$\begin{aligned}\vec{E}_{\text{dep}} &= \vec{E}_{\text{mat}} - \vec{E}_0 = -\frac{\mathcal{N}\vec{P}}{\epsilon_0} \\ \vec{H}_{\text{dep}} &= \vec{H}_{\text{mat}} - \vec{H}_0 = -\mathcal{N}\vec{M}\end{aligned}$$

\mathcal{N} es dependiente solamente en la forma de el objeto colocado en el campo, con $0 \leq \mathcal{N} \leq 1$. Para unos cuantos casos de un elipsoide, se tiene: un plato delgado: $\mathcal{N} = 1$, a long, una barra delgada: $\mathcal{N} = 0$, una a esfera: $\mathcal{N} = \frac{1}{3}$.

2.9 Mezclas de materiales

El desplazamiento de promedio de la electricidad en un material que es inhomogéneo en una escala mesoscopica es dado por: $\langle D \rangle = \langle \varepsilon E \rangle = \varepsilon^* \langle E \rangle$ donde $\varepsilon^* = \varepsilon_1 \left(1 - \frac{\phi_2(1-x)}{\Phi(\varepsilon^*/\varepsilon_2)} \right)^{-1}$ donde $x = \varepsilon_1/\varepsilon_2$.

Para una esfera se encuentra que: $\Phi = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x$. De este modo se tiene:

$$\left(\sum_i \frac{\phi_i}{\varepsilon_i} \right)^{-1} \leq \varepsilon^* \leq \sum_i \phi_i \varepsilon_i$$

Chapter 3

Relatividad

3.1 Relatividad especial

3.1.1 Las transformación de Lorentz

Las transformación de Lorentz $(\vec{x}', t') = (\vec{x}'(\vec{x}, t), t'(\vec{x}, t))$ deja la ecuación de onda invariante, si c es invariante:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2}$$

Esta transformación también puede ser utilizada cuando $ds^2 = ds'^2$ se requiere. La forma general de la transformación de Lorentz es descrita por:

$$\vec{x}' = \vec{x} + \frac{(\gamma - 1)(\vec{x} \cdot \vec{v})\vec{v}}{|\vec{v}|^2} - \gamma \vec{v}t, \quad t' = \gamma \left(t - \frac{\vec{x} \cdot \vec{v}}{c^2} \right)$$

donde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

La diferencia de velocidades \vec{v}' entre dos observadores se transforma de acuerdo:

$$\vec{v}' = \left(\gamma \left(1 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2} \right) \right)^{-1} \left(\vec{v}_2 + (\gamma - 1) \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{v_1^2} \vec{v}_1 - \gamma \vec{v}_1 \right)$$

Si la velocidad es paralela al eje x , se tiene que $y' = y$, $z' = z$:

$$x' = \gamma(x - vt), \quad x = \gamma(x' + vt'), \\ t' = \gamma \left(t - \frac{xv}{c^2} \right), \quad t = \gamma \left(t' + \frac{x'v}{c^2} \right), \quad v' = \frac{v_2 - v_1}{1 - \frac{v_1 v_2}{c^2}}$$

Si $\vec{v} = v\vec{e}_x$, entonces:

$$p'_x = \gamma \left(p_x - \frac{\beta W}{c} \right), \quad W' = \gamma(W - vp_x)$$

Con $\beta = v/c$ el campo eléctrico de una carga en movimiento se obtiene:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{(1 - \beta^2)\vec{e}_r}{(1 - \beta^2 \sin^2(\theta))^{3/2}}$$

El campo electromagnético se transforma de acuerdo con:

$$\vec{E}' = \gamma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad \vec{B}' = \gamma \left(\vec{B} - \frac{\vec{v} \times \vec{E}}{c^2} \right)$$

Longitud, masa y tiempo se transforman siguiendo las siguientes ecuaciones: $\Delta t_r = \gamma \Delta t_0$, $m_r = \gamma m_0$, $l_r = l_0/\gamma$, con $_0$ the quantities in a co-moving reference frame and $_r$ the quantities in a frame moving with velocity v w.r.t. it. The proper time τ is defined as: $d\tau^2 = ds^2/c^2$, so $\Delta\tau = \Delta t/\gamma$. For energy

and momentum holds: $W = m_{\text{r}}c^2 = \gamma W_0$, $W^2 = m_0^2c^4 + p^2c^2$. $p = m_{\text{r}}v = \gamma m_0v = Wv/c^2$, and $pc = W\beta$ where $\beta = v/c$. The force is defined by $\vec{F} = d\vec{p}/dt$.

vectores de dimension cuatro tienen la propiedad que su modulo es independiente del observador: sus componentes *pueden* cambiar despues de una trasformacion de cordenadas, pero su modulo. Las diferecias de dos vectores de dimension cuatro resulta tambien en un vector de dimension cuatro. La velocidad de estos vectores es descrita por $U^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}$. La relacion con la velocidad “normal” $u^i := dx^i/dt$ es: $U^\alpha = (\gamma u^i, i\gamma c)$. Para particulas con una masa en reposo, diferente de cero, obtenemos: $U^\alpha U_\alpha = -c^2$, para particulas con una masa en reposo cero (de modo que $v = c$) se tiene: $U^\alpha U_\alpha = 0$. Los vectores de dimension cuatro para una energia y un momentum son descritos por: $p^\alpha = m_0 U^\alpha = (\gamma p^i, iW/c)$. Asi: $p_\alpha p^\alpha = -m_0^2c^2 = p^2 - W^2/c^2$.

3.1.2 Corrimiento al azul o al rojo

Existen tres causas para que se presente el corrimiento al azul o al rojo:

1. Movimiento: con $\vec{e}_v \cdot \vec{e}_r = \cos(\varphi)$ siguiendo: $\frac{f'}{f} = \gamma \left(1 - \frac{v \cos(\varphi)}{c} \right)$.

Este puede ser derivar tanto en un corrimiento hacia el rojo o un corrimiento hacia el azul, tambien \perp a la direccion del movimiento.

2. Corrimiento Gravitational: $\frac{\Delta f}{f} = \frac{\kappa M}{rc^2}$.

3. Corrimiento al rojo debido a la expansion del universo, por lo que se presentan la radiación de fondo cosmica:

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{R_0}{R_1}$$

3.1.3 El tensor de tension-energia y el tensor de campo

El tensor de tension-energia es descrito por:

$$T_{\mu\nu} = (\rho c^2 + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu} + \frac{1}{c^2} (F_{\mu\alpha}F_\nu^\alpha + \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta})$$

Las leyes de la conservacion pueden ser escritas como: $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$. El el tensor de campo electro-magnetic es:

$$F_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}$$

con $A_\mu := (\vec{A}, iV/c)$ y $J_\mu := (\vec{J}, ic\rho)$. Las ecuaciones de Maxwell pueden ser escritas como:

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\mu, \quad \partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0$$

Las ecuaciones de movimiento para una particula carga en un campo EM se transforma con el tensor de campo:

$$\frac{dp_\alpha}{d\tau} = qF_{\alpha\beta}u^\beta$$

3.2 Relatividad general

3.2.1 Geometría de Riemannian, el tensor de Einstein

Los principios de teoría de relatividad general son:

1. El postulado geometrico: free falling particles move along geodesics of space-time with the proper time τ or arc length s as parameter. For particles with zero rest mass (photons), the use of a free parameter is required because for them holds $ds = 0$. From $\delta \int ds = 0$ the equations of motion can be derived:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\gamma}{ds} = 0$$

2. El *principio de equivalencia*: inertial mass \equiv gravitational mass \Rightarrow gravitation is equivalent with a curved space-time were particles move along geodesics.
3. Por la eleccion adecuada de un sistema de coordenadas es posible hace la metrica localmente plan en cada punto x_i : $g_{\alpha\beta}(x_i) = \eta_{\alpha\beta} := \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$.

El *tensor de Riemann* es definido como: $R_{\nu\alpha\beta}^\mu T^\nu := \nabla_\alpha \nabla_\beta T^\mu - \nabla_\beta \nabla_\alpha T^\mu$, donde la derivada covariante es dada por: $\nabla_j a^i = \partial_j a^i + \Gamma_{jk}^i a^k$ y $\nabla_j a_i = \partial_j a_i - \Gamma_{ij}^k a_k$. Aquí,

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{g^{il}}{2} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right), \text{ para espacios euclidianos esto se reduce a: } \Gamma_{jk}^i = \frac{\partial^2 \bar{x}^l}{\partial x^j \partial x^k} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l},$$

son los *simbolos de Christoffel*. Para tensores de segundo orden se tiene: $[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] T_\nu^\mu = R_{\sigma\alpha\beta}^\mu T_\nu^\sigma + R_{\nu\alpha\beta}^\sigma T_\sigma^\mu$, $\nabla_k a_j^i = \partial_k a_j^i - \Gamma_{kj}^l a_l^i + \Gamma_{kl}^i a_j^l$, $\nabla_k a_{ij} = \partial_k a_{ij} - \Gamma_{ki}^l a_{lj} - \Gamma_{kj}^l a_{il}$ y $\nabla_k a^{ij} = \partial_k a^{ij} + \Gamma_{kl}^i a^{lj} + \Gamma_{kl}^j a^{il}$. Entonces, se obtiene: $R_{\beta\mu\nu}^\alpha = \partial_\mu \Gamma_{\beta\nu}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\beta\mu}^\alpha + \Gamma_{\sigma\mu}^\alpha \Gamma_{\beta\nu}^\sigma - \Gamma_{\sigma\nu}^\alpha \Gamma_{\beta\mu}^\sigma$.

El *tensor de Ricci* es la contracción del tensor de Riemann: $R_{\alpha\beta} := R_{\alpha\mu\beta}^\mu$, which is symmetric: $R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha}$. The *Bianchi identities* are: $\nabla_\lambda R_{\alpha\beta\mu\nu} + \nabla_\nu R_{\alpha\beta\lambda\mu} + \nabla_\mu R_{\alpha\beta\nu\lambda} = 0$.

El *tensor de Einstein* es: $G^{\alpha\beta} := R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R$, donde $R := R^\alpha_\alpha$ es el *escalar de Ricci*, para el que: $\nabla_\beta G_{\alpha\beta} = 0$. Con el principio variacional $\delta \int (\mathcal{L}(g_{\mu\nu}) - R c^2 / 16\pi\kappa) \sqrt{|g|} d^4x = 0$ para variaciones $g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$ las *ecuaciones de campo de Einstein* pueden obtenerse:

$$\boxed{G_{\alpha\beta} = \frac{8\pi\kappa}{c^2} T_{\alpha\beta}} \quad , \text{ el cual tambien puede escribirse como } R_{\alpha\beta} = \frac{8\pi\kappa}{c^2} (T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} T^\mu_\mu)$$

Para espacios vacíos este es equivalente a $R_{\alpha\beta} = 0$. La ecuación $R_{\alpha\beta\mu\nu} = 0$ presenta una sola solución en el espacio plano.

Las ecuaciones de Einstein son diez independientes ecuaciones, las que son de segundo orden en $g_{\mu\nu}$. Por ello, La ecuación de Laplace de la gravitación newtoniana puede obtenerse al establecer: $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, donde $|h| \ll 1$. En el caso estacionario, este resulta en $\nabla^2 h_{00} = 8\pi\kappa \rho / c^2$.

La forma más general de la ecuación de campo es: $R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R + \Lambda g_{\alpha\beta} = \frac{8\pi\kappa}{c^2} T_{\alpha\beta}$

donde Λ es la *constante cosmologica*. Esta constante desempeña un papel importante en los modelos de expansión del universo.

3.2.2 El elemento de línea

El *tensor de métrica* en un espacio euclidiano es dado por: $g_{ij} = \sum_k \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^j}$.

En general se tiene: $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$. En relatividad especial se convierte $ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$. Esta métrica, $\eta_{\mu\nu} := \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$, es llamada la *metrica de Minkowski*.

La *metrica de Schwarzschild externa* se aplica en el vacío exterior de una distribución esférica de masa, y es descrita por:

$$ds^2 = \left(-1 + \frac{2m}{r} \right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

Aquí, $m := M\kappa/c^2$ es la *masa geométrica* de un objeto con masa M , y $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$. Esta métrica es singular para $r = 2m = 2\kappa M/c^2$. Si un objeto es más pequeño que su horizonte de evento $2m$, lo que implica que su velocidad de escape es $> c$, esto es denominado un *hoyo negro*. El límite newtoniano de esta métrica es descrito por:

$$ds^2 = -(1 + 2V)c^2 dt^2 + (1 - 2V)(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

donde $V = -\kappa M/r$ es el potencial gravitacional newtoniano. En relatividad, la componente de $g_{\mu\nu}$ es asociada con los potenciales y las derivadas de $g_{\mu\nu}$ con una intensidad de campo.

Las coordenadas de Kruskal-Szekeres son utilizadas para resolver ciertos problemas con la métrica de Schwarzschild cerca de $r = 2m$. Son definidos por:

- $r > 2m$:

$$\begin{cases} u &= \sqrt{\frac{r}{2m} - 1} \exp\left(\frac{r}{4m}\right) \cosh\left(\frac{t}{4m}\right) \\ v &= \sqrt{\frac{r}{2m} - 1} \exp\left(\frac{r}{4m}\right) \sinh\left(\frac{t}{4m}\right) \end{cases}$$

- $r < 2m$:

$$\begin{cases} u &= \sqrt{1 - \frac{r}{2m}} \exp\left(\frac{r}{4m}\right) \sinh\left(\frac{t}{4m}\right) \\ v &= \sqrt{1 - \frac{r}{2m}} \exp\left(\frac{r}{4m}\right) \cosh\left(\frac{t}{4m}\right) \end{cases}$$

- $r = 2m$: aquí, las coordenadas de Kruskal son singulares, que es necesario para eliminar la singularidad de las coordenadas.

El elemento de línea en estas coordenadas es dado por:

$$ds^2 = -\frac{32m^3}{r} e^{-r/2m} (dv^2 - du^2) + r^2 d\Omega^2$$

La línea $r = 2m$ corresponde a $u = v = 0$, el límite $x^0 \rightarrow \infty$ con $u = v$ y $x^0 \rightarrow -\infty$ with $u = -v$. Las coordenadas Kruskal son únicamente singulares en la hipérbola $v^2 - u^2 = 1$, esto corresponde con $r = 0$. Sobre la línea $dv = \pm du$ holds $d\theta = d\varphi = ds = 0$.

Para una métrica exterior una rotatoria, cargada mase esférica, la métrica de Newman se aplica:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2mr - e^2}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}\right) c^2 dt^2 - \left(\frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 - 2mr + a^2 - e^2}\right) dr^2 - (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{(2mr - e^2)a^2 \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}\right) \sin^2 \theta d\varphi^2 + \left(\frac{2a(2mr - e^2)}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}\right) \sin^2 \theta (d\varphi)(cdt)$$

donde $m = \kappa M/c^2$, $a = L/Mc$ y $e = \kappa Q/\varepsilon_0 c^2$.

Un hoyo negro rotatorio tiene un horizonte de evento con $R_S = m + \sqrt{m^2 - a^2 - e^2}$.

Cerca del hoyo negro rotatorio un arrastre ocurre porque $g_{t\varphi} \neq 0$. Para la métrica de Kerr ($e = 0$, $a \neq 0$) se obtiene que dentro de la superficie $R_E = m + \sqrt{m^2 - a^2 \cos^2 \theta}$ (de ergosfera) las partículas no pueden estar en reposo.

3.2.3 Las orbitas planetarias y el corrimiento del perihelio

Para encontrar una orbita planetaria, el problema variacional $\delta \int ds = 0$ debe ser resuelto. Este es equivalente al problema $\delta \int ds^2 = \delta \int g_{ij} dx^i dx^j = 0$. Sustituyendo por la métrica de Schwarzschild para la orbita planetaria:

$$\frac{du}{d\varphi} \left(\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u \right) = \frac{du}{d\varphi} \left(3mu + \frac{m}{h^2} \right)$$

donde $u := 1/r$ and $h = r^2\dot{\varphi} = \text{constante}$. El término $3mu$ no esta presente en la solución clásica. Este término puede en el caso clasico tambien encontrado de un potencial $V(r) = -\frac{\kappa M}{r} \left(1 + \frac{h^2}{r^2}\right)$.

La ecuación orbital deriva $r = \text{constante}$ como solución, o puede, después de dividir por $du/d\varphi$, ser resuelto por medio de la teoria de perturbaciones. En el orden cero, esto resulta en una orbita elíptica: $u_0(\varphi) = A + B \cos(\varphi)$ con $A = m/h^2$ y B una constante arbitraria. En el primer orden, este se convierte:

$$u_1(\varphi) = A + B \cos(\varphi - \varepsilon\varphi) + \varepsilon \left(A + \frac{B^2}{2A} - \frac{B^2}{6A} \cos(2\varphi) \right)$$

donde $\varepsilon = 3m^2/h^2$ es pequeño. El perihelio de un planeta es el punto en el que r es mínimo, o u máximo. Este es el caso si $\cos(\varphi - \varepsilon\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi \approx 2\pi n(1 + \varepsilon)$. Para el corrimiento del perihelio se tiene que: $\Delta\varphi = 2\pi\varepsilon = 6\pi m^2/h^2$ por orbita.

3.2.4 La trayectoria de un foton

Para la trayectoria de un foton (y para cada partícula con masa en reposo igual a cero) obteniendo $ds^2 = 0$. Sustituyendo la métrica externa de resulta en la siguiente ecuación de orbita:

$$\frac{du}{d\varphi} \left(\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u - 3mu \right) = 0$$

3.2.5 Ondas gravitacionales

Comenzando con la aproximación $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ para campos gravitacionales debiles y la definición $h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h^\alpha_\alpha$ se sigue que $\square h'_{\mu\nu} = 0$ en la condición de norma $\partial h'_{\mu\nu}/\partial x^\nu = 0$ es satisfecho. Para ésto, se sigue que la perdida de energía de un sistema mecánico, si la las velocidades son $\ll c$ y las longitudes de onda \gg el tamaño del sistema, es dado por:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{G}{5c^5} \sum_{i,j} \left(\frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \right)^2$$

con $Q_{ij} = \int \varrho(x_i x_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}r^2)d^3x$ el momento cuadrupolar de masa.

3.2.6 Cosmología

Si para el universo se asume como un sistema completo:

1. Existe un tiempo coordinado global que actúa como x^0 de un sistema de coordenadas gaussiano,
2. Los espacion tridimensionales son isotropitos para ciertos valores de x^0 ,
3. Cada punto es equivalente a cada otro punto para un x^0 fijo.

Entonces la *metrica Robertson-Walker* puede ser derivada para la linea de elementos:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + \frac{R^2(t)}{r_0^2 \left(1 - \frac{kr^2}{4r_0^2}\right)} (dr^2 + r^2 d\Omega^2)$$

Para el *factor de escala* $R(t)$ la ecuación siguiente puede ser derivada:

$$\frac{2\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2 + kc^2}{R^2} = -\frac{8\pi\kappa p}{c^2} + \Lambda \quad \text{and} \quad \frac{\dot{R}^2 + kc^2}{R^2} = \frac{8\pi\kappa\varrho}{3} + \frac{\Lambda}{3}$$

donde p es la presión y ϱ la densidad de el universo. Si $\Lambda = 0$ puede ser derivada para el *parámetro de deaceleración* q :

$$q = -\frac{\ddot{R}R}{\dot{R}^2} = \frac{4\pi\kappa\varrho}{3H^2}$$

donde $H = \dot{R}/R$ is *es la constante de Hubble*. Existe una medición de la velocidad con que las galaxias se alejan una de la otra, y tiene un valor de $\approx (75 \pm 25) \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{Mpc}^{-1}$. Esto brinda tres posibles condiciones para el universo (aquí, W es la cantidad total de energía del universo):

1. **Universo parabolico:** $k = 0$, $W = 0$, $q = \frac{1}{2}$. La velocidad de expansión del universo $\rightarrow 0$ si $t \rightarrow \infty$. The hereto related *densidad critica* es $\rho_c = 3H^2/8\pi\kappa$.
 2. **Universo hiperbólico:** $k = -1$, $W < 0$, $q < \frac{1}{2}$. La velocidad de expansion del universo permanece positiva siempre.
 3. **Universo eliptico:** $k = 1$, $W > 0$, $q > \frac{1}{2}$. La velocidad del universo se convierte negativa después de un tiempo: el universo comienza a colapsarse.
-

Chapter 4

Oscilaciones

4.1 Oscilaciones armónicas

La forma general de una oscilación armónica es: $\Psi(t) = \hat{\Psi}e^{i(\omega t \pm \varphi)} \equiv \hat{\Psi} \cos(\omega t \pm \varphi)$,

donde $\hat{\Psi}$ es la *amplitud*. Una superposición de varias oscilaciones armónicas con la misma frecuencia resulta en una distinta oscilación armónica:

$$\sum_i \hat{\Psi}_i \cos(\alpha_i \pm \omega t) = \hat{\Phi} \cos(\beta \pm \omega t)$$

con:

$$\tan(\beta) = \frac{\sum_i \hat{\Psi}_i \sin(\alpha_i)}{\sum_i \hat{\Psi}_i \cos(\alpha_i)} \quad \text{and} \quad \hat{\Phi}^2 = \sum_i \hat{\Psi}_i^2 + 2 \sum_{j>i} \sum_i \hat{\Psi}_i \hat{\Psi}_j \cos(\alpha_i - \alpha_j)$$

Para oscilaciones armónicas tenemos: $\int x(t)dt = \frac{x(t)}{i\omega}$ y $\frac{d^n x(t)}{dt^n} = (i\omega)^n x(t)$.

4.2 Oscilaciones mecánicas

Para una construcción con un resorte con constante C paralela al amortiguamiento k que es conectado a la masa M , para la que una fuerza periódica $F(t) = \hat{F} \cos(\omega t)$ es aplicada se tiene la ecuación de movimiento $m\ddot{x} = F(t) - k\dot{x} - Cx$. Con amplitudes complejas, esto se convierte $-m\omega^2 x = F - Cx - ik\omega x$. Con $\omega_0^2 = C/m$ siguiendo:

$$x = \frac{F}{m(\omega_0^2 - \omega^2) + ik\omega} \quad , \quad \text{y para la velocidad se tiene: } \dot{x} = \frac{F}{i\sqrt{Cm}\delta + k}$$

donde $\delta = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}$. La cantidad $Z = F/\dot{x}$ es llamada la *impedancia* del sistema. La *cualidad* de el sistema es dada por $Q = \frac{\sqrt{Cm}}{k}$.

La frecuencia con mínima $|Z|$ es llamada *frecuencia de velocidad de resonancia*. Ésto es igual a ω_0 . En la *curva de resonancia* $|Z|/\sqrt{Cm}$ es graficada contra ω/ω_0 . El ancho de la curva es caracterizado por los puntos donde $|Z(\omega)| = |Z(\omega_0)|\sqrt{2}$. En estos puntos se tiene: $R = X$ y $\delta = \pm Q^{-1}$, y el ancho es $2\Delta\omega_B = \omega_0/Q$.

La *rigidez* de un sistema oscilatorio es dado por F/x . La *amplitud de la frecuencia de resonancia* ω_A es la frecuencia donde $i\omega Z$ es mínima. Ello para el caso que $\omega_A = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2}Q^2}$.

La *frecuencia de amortiguamiento* ω_D es una medición para el tiempo en que un sistema oscilatorio llega al reposo. Lo que es dado por $\omega_D = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$. Un amortiguamiento débil ($k^2 < 4mC$) termina con la oscilación después de $T_D = 2\pi/\omega_D$. Para un *amortiguamiento crítico* la oscilación ($k^2 = 4mC$) presenta $\omega_D = 0$. Una oscilación con amortiguamiento fuerte ($k^2 > 4mC$) cae como (if $k^2 \gg 4mC$) $x(t) \approx x_0 \exp(-t/\tau)$.

4.3 Oscilaciones eléctricas

La *impedancia* es dada por: $Z = R + iX$. El ángulo de fase es $\varphi := \arctan(X/R)$. La impedancia de una resistencia es R , de un condensador $1/i\omega C$ y de un auto inductor $i\omega L$. The quality of a coil is $Q = \omega L/R$. La impedancia total en el caso de contar con varios elementos es :

1. Conexión en serie: $V = IZ$,

$$Z_{\text{tot}} = \sum_i Z_i, \quad L_{\text{tot}} = \sum_i L_i, \quad \frac{1}{C_{\text{tot}}} = \sum_i \frac{1}{C_i}, \quad Q = \frac{Z_0}{R}, \quad Z = R(1 + iQ\delta)$$

2. Conexión en paralelo: $V = IZ$,

$$\frac{1}{Z_{\text{tot}}} = \sum_i \frac{1}{Z_i}, \quad \frac{1}{L_{\text{tot}}} = \sum_i \frac{1}{L_i}, \quad C_{\text{tot}} = \sum_i C_i, \quad Q = \frac{R}{Z_0}, \quad Z = \frac{R}{1 + iQ\delta}$$

Aquí, $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$ y $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

El poder suministrado por una fuente es: $P(t) = V(t) \cdot I(t)$, so $\langle P \rangle_t = \hat{V}_{\text{eff}} \hat{I}_{\text{eff}} \cos(\Delta\phi)$
 $= \frac{1}{2} \hat{V} \hat{I} \cos(\phi_v - \phi_i) = \frac{1}{2} \hat{I}^2 \text{Re}(Z) = \frac{1}{2} \hat{V}^2 \text{Re}(1/Z)$, donde $\cos(\Delta\phi)$ es el factor de trabajo.

4.4 Ondas en conductores largos

Estos cables son en una transferencia de señal, e.g. un cable coaxial. Para ellos se tiene: $Z_0 = \sqrt{\frac{dL}{dx} \frac{dx}{dC}}$.

La velocidad de transmisión es dada por $v = \sqrt{\frac{dx}{dL} \frac{dL}{dx}}$.

4.5 conductores y transformadores acoplados

Para dos bobinas cercanas el flujo es: si Φ_{12} es la parte del flujo originado de I_2 a través de la bobina dos que esta cercana a la bobina uno, Luego se tiene $\Phi_{12} = M_{12}I_2$, $\Phi_{21} = M_{21}I_1$. Para los coeficientes de inducción mutuos M_{ij} se tiene:

$$M_{12} = M_{21} := M = k\sqrt{L_1 L_2} = \frac{N_1 \Phi_1}{I_2} = \frac{N_2 \Phi_2}{I_1} \sim N_1 N_2$$

donde $0 \leq k \leq 1$ es el *factor de acoplamiento*. Para una trasformacion es $k \approx 1$. A una carga completa se obtiene:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{I_2}{I_1} = -\frac{i\omega M}{i\omega L_2 + R_{\text{load}}} \approx -\sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = -\frac{N_1}{N_2}$$

4.6 Péndulos

El tiempo de oscilación $T = 1/f$, y para diferentes tipos de péndulos es dado por:

- Resorte oscilatorio: $T = 2\pi\sqrt{m/C}$ si la fuerza es dada por $F = C \cdot \Delta l$.
- Péndulo físico: $T = 2\pi\sqrt{I/\tau}$ con τ la fuerza del momento y I el momento de inercia.
- Péndulo de torsión: $T = 2\pi\sqrt{I/\kappa}$ con $\kappa = \frac{2lm}{\pi r^4 \Delta\varphi}$ la constante de torsión y I el momento de inercia.
- Péndulo matemático: $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ con g la aceleración gravitatoria y l la longitud del péndulo.

Chapter 5

Ondas

5.1 La ecuación de onda

La forma general de la ecuación de onda es: $\square u = 0$, escrito de otro modo:

$$\nabla^2 u - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

donde u is the disturbance and v la *velocidad de propagacion*. En general podemos escribir: $v = f\lambda$. Por definición encontramos: $k\lambda = 2\pi$ y $\omega = 2\pi f$.

En principio, existen dos clases de ondas:

1. Ondas longitudinales: Para las que tenemos $\vec{k} \parallel \vec{v} \parallel \vec{u}$.
2. Ondas trasversales: Para las que tenemos $\vec{k} \parallel \vec{v} \perp \vec{u}$.

La *velocidad de fase* es dada por $v_{ph} = \omega/k$. La *velocidad de grupo* es dada por:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = v_{ph} + k \frac{dv_{ph}}{dk} = v_{ph} \left(1 - \frac{k}{n} \frac{dn}{dk} \right)$$

donde n es el índice de refracción del medio. Si v_{ph} no depende de ω tenemos: $v_{ph} = v_g$. En un medio dispersivo posible que $v_g > v_{ph}$ o $v_g < v_{ph}$, y $v_g \cdot v_f = c^2$. Si deseamos transmitir información mediante una onda, e.g. por modulación de una onda EM, la información viaja con la velocidad *velocity* at with a change in the electromagnetic field propagates. Esta velocidad es frecunetemente igual a la velocidad de grupo.

Para algunos medios, la velocidad de propagación sigue la forma:

- Ondas de presión en un líquido o un gas: $v = \sqrt{\kappa/\rho}$, donde κ es el módulo de compresión.
- Para ondas de presión en un gas tenemos también: $v = \sqrt{\gamma p/\rho} = \sqrt{\gamma RT/M}$.
- Ondas de presión en una barra delgada y sólida de diámetro $\ll \lambda$: $v = \sqrt{E/\rho}$
- Ondas en una cuerda: $v = \sqrt{F_{span}l/m}$
- Ondas en la superficie de un líquido: $v = \sqrt{\left(\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\gamma}{\rho\lambda}\right) \tanh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)}$

donde h es la profundidad de líquido y γ es la tensión superficial. Si $h \ll \lambda$ tenemos: $v \approx \sqrt{gh}$.

5.2 Soluciones a la ecuación de onda

5.2.1 Ondas planas

En n dimensiones una onda plana armónica es definida:

$$u(\vec{x}, t) = 2^n \hat{u} \cos(\omega t) \sum_{i=1}^n \sin(k_i x_i)$$

La ecuación del movimiento armonico de una onda plana es: $u(\vec{x}, t) = \hat{u} \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} \pm \omega t + \varphi)$

Si las ondas son reflejadas en el final de un resorte esto resulta en un cambio de fase. Si un extremo es fijo el cambio de fase es igual a $\pi/2$ respecto a la onda reflejada, con la condición de frontera $u(l) = 0$. Una pared libre no presenta un cambio de fase de la onda reflejada, con condiciones de frontera $(\partial u / \partial x)_l = 0$.

Si un observador se encuentra en movimiento w.r.t. y una onda presenta una velocidad v_{obs} , el observara un cambio de frecuencia: conocido como *efector Doppler*. Este es descrito por: $\frac{f}{f_0} = \frac{v_f - v_{\text{obs}}}{v_f}$.

5.2.2 Ondas esfericas

Cuando se presenta simétrica esférica, la ecuación de onda homogénea es dada por:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2(ru)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2(ru)}{\partial r^2} = 0$$

con la solución general:

$$u(r, t) = C_1 \frac{f(r - vt)}{r} + C_2 \frac{g(r + vt)}{r}$$

5.2.3 Ondas cilindricas

Cuando se presenta simetría cilíndrica, la ecuación de onda homogénea se convierte en:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = 0$$

Esta es una ecuación de Bessel, con soluciones que pueden ser escritas como funciones de Hankel. Para valores lo suficientemente grandes de r estos son aproximados por:

$$u(r, t) = \frac{\hat{u}}{\sqrt{r}} \cos(k(r \pm vt))$$

5.2.4 la solución general en una dimensión

Starting point is the equation:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \sum_{m=0}^N \left(b_m \frac{\partial^m}{\partial x^m} \right) u(x, t)$$

donde $b_m \in \mathbb{R}$. Sustituyendo $u(x, t) = A e^{i(kx - \omega t)}$ obtenemos dos soluciones $\omega_j = \omega_j(k)$ como relaciones de dispersion. La solución general es:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(a(k) e^{i(kx - \omega_1(k)t)} + b(k) e^{i(kx - \omega_2(k)t)} \right) dk$$

Porque en general las frecuencias ω_j son no lineales en k existe una dispersión y la solución únicamente puede ser escrita como la suma de funciones dependiendo exclusivamente de $x \pm vt$: la transformación del frente de onda.

5.3 El método de la fase estacionaria

Usualmente las integrales de Fourier de la sección previa no pueden ser calculadas exactamente. Si $\omega_j(k) \in \mathbb{R}$ el método de fases estacionarias puede ser aplicado. Asumiendo que $a(k)$ es únicamente una función de variación lenta de k , pudiendo establecer que las partes del eje k donde la fase de $kx - \omega(k)t$ cambia rápidamente pudiendo no dar una contribución a las integrales porque los exponentes oscilan rápidamente. Las únicas áreas que contribuyen significativamente a la integral son áreas con una fase estacionaria, determinada por $\frac{d}{dk}(kx - \omega(k)t) = 0$. Ahora la siguiente aproximación es posible:

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk \approx \sum_{i=1}^N \sqrt{\frac{2\pi}{\frac{d^2\omega(k_i)}{dk_i^2}}} \exp \left[-i\frac{1}{4}\pi + i(k_i x - \omega(k_i)t) \right]$$

5.4 Funciones de Green para problemas de valores iniciales

Este método es preferible si las soluciones se desvían significativamente de las soluciones estacionarias, como puntos de excitación. Comenzando con la ecuación de onda en una dimensión, con $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2$ obteniendo: si $Q(x, x', t)$ es la solución con valores iniciales $Q(x, x', 0) = \delta(x - x')$ y $\frac{\partial Q(x, x', 0)}{\partial t} = 0$, y $P(x, x', t)$ la solución con valores iniciales $P(x, x', 0) = 0$ y $\frac{\partial P(x, x', 0)}{\partial t} = \delta(x - x')$, entonces la solución de la ecuación de onda con condiciones iniciales arbitrarias $f(x) = u(x, 0)$ and $g(x) = \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t}$ es descrita por:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x') Q(x, x', t) dx' + \int_{-\infty}^{\infty} g(x') P(x, x', t) dx'$$

P y Q son llamados los *propagadores*. Ellos son definidos por:

$$\begin{aligned} Q(x, x', t) &= \frac{1}{2} [\delta(x - x' - vt) + \delta(x - x' + vt)] \\ P(x, x', t) &= \begin{cases} \frac{1}{2v} & \text{if } |x - x'| < vt \\ 0 & \text{if } |x - x'| > vt \end{cases} \end{aligned}$$

Posteriormente se obtiene la relación: $Q(x, x', t) = \frac{\partial P(x, x', t)}{\partial t}$

5.5 Guías de onda y cavidades resonantes

Las condiciones de frontera para un conductor perfecto pueden ser derivada de las ecuaciones de Maxwell. Si \vec{n} es un vector unitario \perp a la superficie, apuntando de 1 a 2, y \vec{K} es la densidad de corriente superficial, así, tenemos:

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) &= \sigma & \vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) &= 0 \\ \vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) &= 0 & \vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) &= \vec{K} \end{aligned}$$

En una guía de onda se tienen por la simetría esférica: $\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{\mathcal{E}}(x, y) e^{i(kz - \omega t)}$ y $\vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{\mathcal{B}}(x, y) e^{i(kz - \omega t)}$. De esto podemos deducir que, si \mathcal{B}_z y \mathcal{E}_z no son $\equiv 0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_x &= \frac{i}{\varepsilon\mu\omega^2 - k^2} \left(k \frac{\partial \mathcal{B}_z}{\partial x} - \varepsilon\mu\omega \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial y} \right) & \mathcal{B}_y &= \frac{i}{\varepsilon\mu\omega^2 - k^2} \left(k \frac{\partial \mathcal{B}_z}{\partial y} + \varepsilon\mu\omega \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial x} \right) \\ \mathcal{E}_x &= \frac{i}{\varepsilon\mu\omega^2 - k^2} \left(k \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial x} + \varepsilon\mu\omega \frac{\partial \mathcal{B}_z}{\partial y} \right) & \mathcal{E}_y &= \frac{i}{\varepsilon\mu\omega^2 - k^2} \left(k \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial y} - \varepsilon\mu\omega \frac{\partial \mathcal{B}_z}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

Ahora podemos distinguir entre tres casos:

1. $B_z \equiv 0$: Los modos Magnéticos Transversales (MT). Condiciones de frontera: $\mathcal{E}_z|_{\text{surf}} = 0$.
2. $E_z \equiv 0$: Los modos Eléctricos Transversales (ET). Condición de frontera: $\left. \frac{\partial \mathcal{B}_z}{\partial n} \right|_{\text{surf}} = 0$.

Para los modos ET y MT se encuentra que es un problema de valores propios para \mathcal{E}_z resp. \mathcal{B}_z con condiciones de frontera:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi = -\gamma^2 \psi \quad \text{con eigenvalores } \gamma^2 := \varepsilon \mu \omega^2 - k^2$$

Ello da una solución descrita ψ_ℓ con eigenvalores γ_ℓ^2 : $k = \sqrt{\varepsilon \mu \omega^2 - \gamma_\ell^2}$. Para $\omega < \omega_\ell$, k es imaginario y la onda es amortiguada. Entonces, ω_ℓ es llamada la *frecuencia de corte*. En conductores rectangulares la siguiente expresion puede ser obtenida para la frecuencia de corte para los modos ET_{*m,n*} de MT_{*m,n*}:

$$\lambda_\ell = \frac{2}{\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}}$$

3. E_z y B_z son cero en todas partes: El modo electromagnético transversal (TEM). Entonces se tiene: $k = \pm \omega \sqrt{\varepsilon \mu}$ y $v_f = v_g$, justo como si no existiera la guía de onda. Entonces $k \in \mathbb{R}$, de tal modo que no existe una frecuencia de corte.

En una cavidad rectangular tridimensional con fronteras a , b y c los números de onda posibles son: $k_x = \frac{n_1 \pi}{a}$, $k_y = \frac{n_2 \pi}{b}$, $k_z = \frac{n_3 \pi}{c}$. Lo que resulta en las frecuencias posibles $f = vk/2\pi$ en la cavidad:

$$f = \frac{v}{2} \sqrt{\frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2} + \frac{n_z^2}{c^2}}$$

Para una cavidad cúbica, con $a = b = c$, los números de modos posibles de oscilación N_L para ondas longitudinales son:

$$N_L = \frac{4\pi a^3 f^3}{3v^3}$$

Porque ondas transversales tienen dos posibles polarizaciones, teniendo: $N_T = 2N_L$.

5.6 Ecuaciones de ondas no lineales

La ecuación de *Van der Pol* establece que:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - \varepsilon \omega_0 (1 - \beta x^2) \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

βx^2 puede ser ignorada para valores muy pequeños de la amplitud. Sustituyendo por $x \sim e^{i\omega t}$ se tiene: $\omega = \frac{1}{2}\omega_0(i\varepsilon \pm 2\sqrt{1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2})$. El orden más pequeño de inestabilidades crece como $\frac{1}{2}\varepsilon\omega_0$. Mientras x crece, el segundo término se hace grande y disminuye el crecimiento. Las oscilaciones en una escala de tiempo $\sim \omega_0^{-1}$ pueden existir. Si x se expande como $x = x^{(0)} + \varepsilon x^{(1)} + \varepsilon^2 x^{(2)} + \dots$. Y es sustituido, se obtiene, además periódica, *términos seculares* $\sim \varepsilon t$. Si se asume que existe escalas de tiempo τ_n , $0 \leq \tau \leq N$ con $\partial \tau_n / \partial t = \varepsilon^n$ y si el término secular se establece cero se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \omega_0^2 x^2 \right\} = \varepsilon \omega_0 (1 - \beta x^2) \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$$

Esta es la ecuación de energía. La energía es conservada si el lado izquierdo de la ecuación anterior es cero. Si $x^2 > 1/\beta$, el lado derecho de la ecuación cambia de signo y se incrementa la energía, cambio de un decremento de energía. Este mecanismo limita el crecimiento de las oscilaciones.

La ecuación de *Korteweg-De Vries* es dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} - \underbrace{au \frac{\partial u}{\partial x}}_{\text{non-lin}} + \underbrace{b^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}}_{\text{dispersive}} = 0$$

Esta ecuación es por ejemplo un modelo para onda ionicas-acusticas en un plasma. Para esta ecuación, existen soluciones con la forma de solitones:

$$u(x - ct) = \frac{-d}{\cosh^2(e(x - ct))}$$

con $c = 1 + \frac{1}{3}ad$ y $e^2 = ad/(12b^2)$.

Chapter 6

Óptica

6.1 La desviación de la luz

For the refraction at a surface holds: $n_i \sin(\theta_i) = n_t \sin(\theta_t)$ donde n es el *índice de refracción* de un material. La ley de Snell es:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

Si $\Delta n \leq 1$, el cambio de fase de la luz es $\Delta\varphi = 0$, si $\Delta n > 1$ tenemos: $\Delta\varphi = \pi$. La refracción de la luz en un material es causada por la dispersión de los átomos. Lo cual es descrito por:

$$n^2 = 1 + \frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_{0,j}^2 - \omega^2 - i\delta\omega}$$

donde n_e es la densidad electrónica y f_j la *oscillator strength*, for which holds: $\sum_j f_j = 1$. From this follows that $v_g = c/(1 + (n_e e^2/2\varepsilon_0 m \omega^2))$. De esto la ecuación de Cauchy puede ser derivada:

$$n = a_0 + a_1/\lambda^2. \text{ Más general, es posible expandir } n \text{ como: } n = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{\lambda^{2k}}.$$

Para una onda electromagnética en general tenemos: $n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$.

El camino, seguido por un rayo de luz en un material puede ser encontrado por medio de el *principio de Fermat*:

$$\delta \int_1^2 dt = \delta \int_1^2 \frac{n(s)}{c} ds = 0 \Rightarrow \delta \int_1^2 n(s) ds = 0$$

6.2 Óptica geométrica paraxial

6.2.1 Lentes

La fórmula de lentes de Gauss puede ser deducida del principio de Fermat con las aproximaciones $\cos \varphi = 1$ y $\sin \varphi = \varphi$. Para la refracción en una superficie esférica con radio R se tiene:

$$\frac{n_1}{v} - \frac{n_2}{b} = \frac{n_1 - n_2}{R}$$

donde $|v|$ es la distancia al objeto y $|b|$ es la distancia de la imagen. Aplicando dos veces este resultado en:

$$\frac{1}{f} = (n_1 - 1) \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)$$

donde n_1 es el índice de refracción de las lentes, f es la longitud focal, además R_1 y R_2 son el radio de curvatura de ambas superficies. Para una lente doblemente cóncava tenemos $R_1 < 0$, $R_2 > 0$, para una lente doblemente convexa tenemos $R_1 > 0$ y $R_2 < 0$. Entonces se tiene:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{v} - \frac{1}{b}$$

$D := 1/f$ es llamado el poder dióptrico de una lente. Para una lente con espesor d y diametro D se tiene una buena aproximación: $1/f = 8(n-1)d/D^2$. Para dos lentes colocadas en una línea con una distancia d se tiene:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}$$

En estas ecuaciones los siguientes signos son utilizados para la refracción de una superficie esférica, como en un rayo de luz entrante:

Cantidad	+	-
R	Superficie cóncava	Superficie Convexa
f	Lente convergente	Lente divergente
v	Real objeto	Objeto virtual
b	Imágenes virtuales	Imagen real

6.2.2 Espejos

Para imágenes formadas por espejos tenemos:

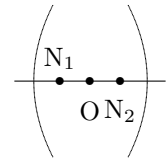
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{v} + \frac{1}{b} = \frac{2}{R} + \frac{h^2}{2} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{v} \right)^2$$

donde h es la distancia perpendicular entre el punto donde el rayo de luz alcanza al espejo y el eje óptico. Aberraciones esféricas pueden reducirse evitando el uso de espejos esféricos. Un espejo esférico no presenta aberración esférica para rayos de luz paralelos con el eje óptico y es entonces que tales espejos son frecuentemente usados para telescopios. Los signos empleados son:

Quantity	+	-
R	Espejo cóncavo	Espejo convexo
f	Espejo cóncavo	Espejo convexo
v	Objeto real	Objeto virtual
b	Imagen real	Imagen virtual

6.2.3 Planos principales

Los *puntos nodales* N de una lente son definidos en la figura a la derecha. Si la lente es inmersa por el mismo medio en ambos lados, los puntos nodales son los mismos como los puntos principales H . El plano \perp al eje óptico a traves de los puntos principales son llamados los *planos principales*. Si la lente es descrita por una matriz m_{ij} más que la distancia h_1 y h_2 a las fronteras de las lentes, obteniendo:



$$h_1 = n \frac{m_{11} - 1}{m_{12}} \quad , \quad h_2 = n \frac{m_{22} - 1}{m_{12}}$$

6.2.4 Magnificación

La *magnificación lineal* es definida por: $N = -\frac{b}{v}$

La *magnificación angular* es definida por: $N_\alpha = -\frac{\alpha_{\text{syst}}}{\alpha_{\text{none}}}$

donde α_{sys} es el tamaño de la imagen retinal con el sistema óptico y α_{none} el tamaño de la imagen retinal sin el sistema. Adelante se tiene: $N \cdot N_\alpha = 1$. Para un telescopio se tiene: $N = f_{\text{objetivo}}/f_{\text{ocular}}$. El *numero f* es definido por f/D_{objetivo} .

6.3 Metodos matriciales

Un rayo de luz puede ser descrito por un vector $(n\alpha, y)$ con α el ángulo eje óptico y y la distancia al eje óptico. El cambio del rayo de luz interaccionando con el sistema óptico se puede obtener utilizando una multiplicación matricial:

$$\begin{pmatrix} n_2\alpha_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} n_1\alpha_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

donde $\text{Tr}(M) = 1$. M es un producto de matrices elementales. Las que son:

1. Trasferencia a lo largo de la longitud l : $M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l/n & 1 \end{pmatrix}$
2. Refracion de un superficie con un poder dióptico D : $M_T = \begin{pmatrix} 1 & -D \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

6.4 Aberraciones

Las lentes no brindan una imagen perfecta. Algunas de las causas de la imperfección de las imágenes son causadas por:

1. **Aberración cromática** es causada por el hecho que $n = n(\lambda)$. Esta puede ser parcialmente corregida con una lente que compuesta de otras lentes con diferentes funciones $n_i(\lambda)$. Utilizando N lentes se hace posible obtener la misma f para N longitudes de onda.
2. **Aberración esférica** es causada por los efectos de segundo orden que son usualmente ignorados; una superficie esférica no crea una perfecta lente. Los rayos entrantes que están alejados del eje óptica pueden se desviadas más.
3. **Coma** es causada por el hecho que los planos principales de una lente son únicamente planos cerca del eje principal. Más allá del eje óptico son curvos. Esta curvatura puede ser tanto positiva como negativa.
4. **Astigmatismo**: Para cada punto de un objeto que no se encuentra en el eje óptico la imagen es un elipse, porque el espesor de la lente no es el mismo en todas partes.
5. **Curvatura de campo** puede ser corregida por el ojo humano.
6. **Distorsion** provoca aberración cerca de los alrededores de la imagen. sta puede ser corregida por medio de una combinación de lentes positivas y lentes negativas.

6.5 Reflexión y transmisión

Si una onda electromagnética alcanza un medio transparente parte de la onda se reflejara al mismo ángulo que el ángulo de incidencia, y una parte se refractara al ángulo que predice la ley de Snell. Existe una diferencia entre el vector de campo \vec{E} de la onda \perp o \parallel w.r.t. respecto a la superficie. Donde los coeficientes de reflexión r y de transmisión t son definidos como:

$$r_{\parallel} \equiv \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_{\parallel}, \quad r_{\perp} \equiv \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_{\perp}, \quad t_{\parallel} \equiv \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)_{\parallel}, \quad t_{\perp} \equiv \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)_{\perp}$$

donde E_{0r} es la amplitud de reflejada y E_{0t} la amplitud transmitida. Entonces las ecuaciones de Fresnel son:

$$r_{\parallel} = \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)}, \quad r_{\perp} = \frac{\sin(\theta_t - \theta_i)}{\sin(\theta_t + \theta_i)}$$

$$t_{\parallel} = \frac{2 \sin(\theta_t) \cos(\theta_i)}{\sin(\theta_t + \theta_i) \cos(\theta_t - \theta_i)}, \quad t_{\perp} = \frac{2 \sin(\theta_t) \cos(\theta_i)}{\sin(\theta_t + \theta_i)}$$

Lo siguiente deriva en: $t_{\perp} - r_{\perp} = 1$ y $t_{\parallel} + r_{\parallel} = 1$. Si el coeficiente de reflexión R y el de transmisión T son definidos como (con $\theta_i = \theta_r$):

$$R \equiv \frac{I_r}{I_i} \quad \text{and} \quad T \equiv \frac{I_t \cos(\theta_t)}{I_i \cos(\theta_i)}$$

con $I = \langle |\vec{S}| \rangle$ se deduce posteriormente: $R + T = 1$. Un especial caso es $r_{\parallel} = 0$. Esto sucede si el ángulo entre los rayos reflejado y transmitido es 90° . De la ley de Snell se obtiene: $\tan(\theta_i) = n$. Este ángulo es denominado *ángulo de Brewster*. La situación con $r_{\perp} = 0$ no es posible.

6.6 Polarización

La polarización es definida como: $P = \frac{I_p}{I_p + I_u} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$

Donde la intensidad de la luz polarizada es dada por I_p y la intensidad de la luz no polarizada es dada por I_u . I_{\max} y I_{\min} son las intensidades máxima y el mínima cuando la luz atraviesa un polarizador. Si la luz polariza atraviesa un polarizador se aplica la *ley de Malus*: $I(\theta) = I(0) \cos^2(\theta)$ donde θ es el ángulo de el polarizador.

El estado del rayo de luz puede ser descrito por los *parámetros de Stokes*: comenzando con cuatro filtros que transmiten, cada uno, la mitad de la intensidad. El primero es independiente de la polarización, e, segundo y el tercero son polarizadores lineales con los ejes de transmisión horizontales y a $+45^\circ$, mientras que el cuarto es un polarizador circular que es opaco para estados L . Por lo que se tiene $S_1 = 2I_1$, $S_2 = 2I_2 - 2I_1$, $S_3 = 2I_3 - 2I_1$ y $S_4 = 2I_4 - 2I_1$.

El estado de un rayo de luz *polarizado* puede ser también descrito por medio del *vector de Jones*:

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{0x} e^{i\varphi_x} \\ E_{0y} e^{i\varphi_y} \end{pmatrix}$$

Para el estado horizontal P tenemos: $\vec{E} = (1, 0)$, para el estado vertical P $\vec{E} = (0, 1)$, el estado R es $\vec{E} = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1, -i)$ y el estado L es $\vec{E} = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1, i)$. El cambio de estado de un haz de luz después de pasar por la componente óptica puede ser descrito como $\vec{E}_2 = M \cdot \vec{E}_1$. Para algunos tipos de componentes ópticas la matriz de Jones M es descrita por:

$$\text{Polarizador lineal horizontal:} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Polarizador lineal vertical:} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Polarizador lineal a } +45^\circ \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Polarizador lineal a } -45^\circ \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{4}\lambda \text{ placa, eje rápido vertical} \quad e^{i\pi/4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{4}\lambda \text{ plate, eje rápido horizontal} \quad e^{i\pi/4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

$$\text{Polarizador circular derecho homogéneo} \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Polarizador circular izquierdo homogéneo} \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

6.7 Prismas y dispersión

Un rayo de luz atravesando un prisma es refractado dos veces y adquiere un desviación de la dirección original $\delta = \theta_i + \theta_{i'} + \alpha$ w.r.t. la dirección incidente, donde α es el ángulo apex, θ_i es el ángulo entre el ángulo incidente y la línea perpendicular a las superficie y $\theta_{i'}$ es el ángulo entre el rayo que sale del prisma y la línea perpendicular a la superficie. Donde θ_i varia. Existe un ángulo δ que hace minino. Para un índice de refraccion del prisma obtenemos:

$$n = \frac{\sin(\frac{1}{2}(\delta_{\min} + \alpha))}{\sin(\frac{1}{2}\alpha)}$$

La dispersión de un prisma es definida por:

$$D = \frac{d\delta}{d\lambda} = \frac{d\delta}{dn} \frac{dn}{d\lambda}$$

Donde el primer factor depende de la forma y el segundo depende de la compasión del prisma. Para el primer factor tenemos:

$$\frac{d\delta}{dn} = \frac{2 \sin(\frac{1}{2}\alpha)}{\cos(\frac{1}{2}(\delta_{\min} + \alpha))}$$

Para luz visible usualmente tenemos $dn/d\lambda < 0$: para pequeñas longitudes de onda son más fuertes que para longitudes grandes. El índice de refracción en esta área puede ser aproximado por la formula de Cauchy.

6.8 Difracción

La difracción de Fraunhofer ocurre cuando la fuente se encuentra alejada (s). La difracción de Fraunhofer de la luz atravesando múltiples rejillas es descrita por:

$$\frac{I(\theta)}{I_0} = \left(\frac{\sin(u)}{u} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin(Nv)}{\sin(v)} \right)^2$$

donde $u = \pi b \sin(\theta)/\lambda$, $v = \pi d \sin(\theta)/\lambda$. N es el número de rejillas, b el ancho de la rejilla y d la distancia entre rejillas. La máxima intensidad es dada por $d \sin(\theta) = k\lambda$.

La difracción a través de una apertura esférica con radio a es descrita por:

$$\frac{I(\theta)}{I_0} = \left(\frac{J_1(ka \sin(\theta))}{ka \sin(\theta)} \right)^2$$

El patrón de difracción de una apertura rectangular a una distancia R con longitud a en la dirección x y b en la dirección y es descrita por:

$$\frac{I(x, y)}{I_0} = \left(\frac{\sin(\alpha')}{\alpha'} \right)^2 \left(\frac{\sin(\beta')}{\beta'} \right)^2$$

donde $\alpha' = kax/2R$ y $\beta' = kby/2R$.

Donde los rayos X son difractados por un cristal colocado en una posición de máxima intensidad *relación de Bragg*: $2d \sin(\theta) = n\lambda$ donde d es la distancia entre las capas inter atómicas del cristal.

Cera de la fuente el modelo de Fraunhofer es invalido porque ignara la dependencia angular de las ondas reflejadas. Esto es descrito por la *oblicuidad* o el *factor de inclinación*, que describe la direccionalidad de las emisiones secundarias: $E(\theta) = \frac{1}{2}E_0(1 + \cos(\theta))$ donde θ es el ángulo w.r.t. el eje óptico.

La difracción limita la *resolución* del sistema. Ésto This es el ángulo minino $\Delta\theta_{\min}$ entre dos rayos incidentes provenientes de puntos alejados para los que los patrones de refracción pueden ser detectados separadamente. Para una rejilla circular se tiene: $\Delta\theta_{\min} = 1.22\lambda/D$ where D es el diámetro de la rejilla.

Para la rejilla se tiene: $\Delta\theta_{\min} = 2\lambda/(Na \cos(\theta_m))$ Donde a es la distancia entre dos picos y N el número de picos. La diferencia mínima entre dos longitudes de onda que están separadas en un patrón de difracción en un múltiplo de la geometría de la rejilla es descrita por $\Delta\lambda/\lambda = nN$ donde N es el número de líneas y n el orden del patrón.

6.9 Efectos ópticos especiales

- **Birrefringencia y dicronismo.** \vec{D} no es paralelo con el vector \vec{E} si la polarizabilidad \vec{P} de un material no es igual en todas direcciones. Hay al menos tres direcciones, los *ejes principales*, en que son paralelos. Esto resulta en tres índices de refracción n_i que pueden ser utilizados para construir un elipsoide de Fresnel. En caso que $n_2 = n_3 \neq n_1$, que sucede, por ejemplo, en un cristal trigonal, hexagonal y tetragonal hay un eje óptico en la dirección de n_1 . Rayos incidentes pueden ahora ser separados en dos partes: la *onda ordinaria* que esta linealmente polarizada \perp al plano a través que la dirección y el eje óptico. La *onda extraordinaria* que esta linealmente polarizada en el plano que forma la dirección de la transmisión y el eje óptico. *Dicronismo* es causado por una diferente absorción de las ondas ordinarias y extraordinarias en algunos materiales. *Imágenes dobles* ocurren cuando el rayo incidente hace un ángulo con el eje óptico: La onda extraordinaria será refractada, la ordinaria no será.
- **Retardadores: waveplates and compensators.** Incident light will have a phase shift of $\Delta\varphi = 2\pi d(|n_o - n_e|)/\lambda_0$ if an uniaxial crystal is cut in such a way that the optical axis is parallel with the front and back plane. Here, λ_0 is the wavelength in vacuum and n_o and n_e the refractive indices for the ordinary and extraordinary wave. For a quarter-wave plate holds: $\Delta\varphi = \pi/2$.
- **The Kerr-effect:** isotropic, transparent materials can become birefringent when placed in an electric field. In that case, the optical axis is parallel to \vec{E} . The difference in refractive index in the two directions is given by: $\Delta n = \lambda_0 K E^2$, where K is the *Kerr constant* of the material. If the electrodes have an effective length ℓ and are separated by a distance d , the retardation is given by: $\Delta\varphi = 2\pi K \ell V^2/d^2$, where V is the applied voltage.
- **The Pockels** or linear electro-optical effect can occur in 20 (from a total of 32) crystal symmetry classes, namely those without a centre of symmetry. These crystals are also *piezoelectric*: their polarization changes when a pressure is applied and vice versa: $\vec{P} = p d + \epsilon_0 \chi \vec{E}$. The retardation in a Pockels cell is $\Delta\varphi = 2\pi n_0^3 r_{63} V/\lambda_0$ where r_{63} is the 6-3 element of the electro-optic tensor.
- **The Faraday effect:** the polarization of light passing through material with length d and to which a magnetic field is applied in the propagation direction is rotated by an angle $\beta = \mathcal{V} B d$ where \mathcal{V} is the *Verdet constant*.
- **Čerenkov radiation** arises when a charged particle with $v_q > v_f$ arrives. The radiation is emitted within a cone with an apex angle α with $\sin(\alpha) = c/c_{\text{medium}} = c/nv_q$.

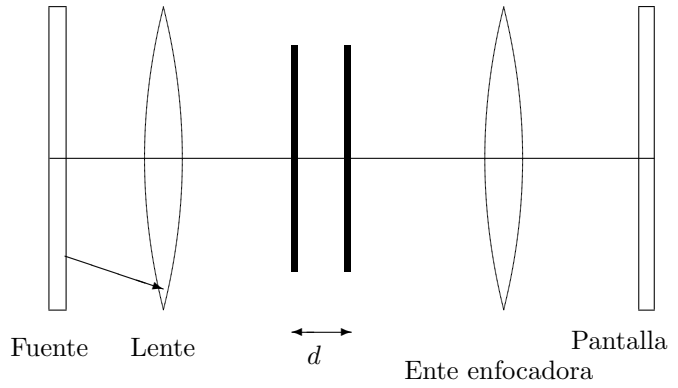
6.10 Interferómetro de Fabry-Perot

Para un interferómetro de Fabry-Perot se tiene en general: $T + R + A = 1$ donde T es el factor de transmisión, R el factor de reflexión y A el factor de absorción. Si F es escrito como $F = 4R/(1 - R)^2$ se obtiene que la distribución de intensidad:

$$\frac{I_t}{I_i} = \left[1 - \frac{A}{1 - R} \right]^2 \frac{1}{1 + F \sin^2(\theta)}$$

El término $[1 + F \sin^2(\theta)]^{-1} := \mathcal{A}(\theta)$ es llamado la *función de Airy*.

El ancho de los picos a la mitad de la altura es dado por $\gamma = 4/\sqrt{F}$. La *fineza* \mathcal{F} es definida como $\mathcal{F} = \frac{1}{2}\pi\sqrt{F}$. La máxima resolución es dada por $\Delta f_{\min} = c/2nd\mathcal{F}$.



Chapter 7

Física estadística

7.1 Grados de libertad

Una molécula constituida por n átomos presenta $s = 3n$ grados de libertad. Existen tres grados traslacionales de libertad, una molécula lineal tiene $s = 3n - 5$ grados vibracionales de libertad y una molécula no lineal $s = 3n - 6$. Una molécula lineal tiene dos grados rotacionales de libertad y una molécula no lineal tres.

Debido a que los grados de libertad vibracional cuentan tanto para energía cinética y energía potencial es que se deben contar dos veces. Así, para moléculas lineales esto resulta en un total de $s = 6n - 5$ grados. el número cambia para moléculas no lineales en $s = 6n - 6$. La energía promedio de una molécula en equilibrio termodinámico es $\langle E_{\text{tot}} \rangle = \frac{1}{2} s k T$. Cada grado de libertad de una molécula posee en principio la misma energía: el *principio de equipartición*.

La energía rotacional y la energía vibracional de una molécula son:

$$W_{\text{rot}} = \frac{\hbar^2}{2I} l(l+1) = B l(l+1) , \quad W_{\text{vib}} = (v + \frac{1}{2}) \hbar \omega_0$$

Los niveles vibracionales son excitados si $kT \approx \hbar \omega$, los niveles rotaciones de una molécula heteronuclear son excitados si $kT \approx 2B$. Para moléculas homonucleares se aplican adicionales reglas de selección, así los niveles rotacionales están bien acoplados si $kT \approx 6B$.

7.2 La función de distribución de energía

La forma general de la función de distribución de velocidades en equilibrio es

$P(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z = P(v_x) dv_x \cdot P(v_y) dv_y \cdot P(v_z) dv_z$ con

$$P(v_i) dv_i = \frac{1}{\alpha \sqrt{\pi}} \exp \left(-\frac{v_i^2}{\alpha^2} \right) dv_i$$

donde $\alpha = \sqrt{2kT/m}$ es la *velocidad más probable* de una partícula. La velocidad promedio es descrita por $\langle v \rangle = 2\alpha/\sqrt{\pi}$, y $\langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} \alpha^2$. La distribución en función del valor absoluto de la velocidad es dado por:

$$\frac{dN}{dv} = \frac{4N}{\alpha^3 \sqrt{\pi}} v^2 \exp \left(-\frac{mv^2}{2kT} \right)$$

La forma general de la función de distribución de energía se convierte:

$$P(E) dE = \frac{c(s)}{kT} \left(\frac{E}{kT} \right)^{\frac{1}{2}s-1} \exp \left(-\frac{E}{kT} \right) dE$$

donde $c(s)$ es una constante de normalización, dada por:

1. Par s : $s = 2l$: $c(s) = \frac{1}{(l-1)!}$
2. Impar s : $s = 2l + 1$: $c(s) = \frac{2^l}{\sqrt{\pi}(2l-1)!!}$

7.3 Presión en un muro

El número de moléculas que colisionan contra un muro con una superficie A en un tiempo τ es descrito por:

$$\iiint d^3N = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} nAv\tau \cos(\theta)P(v, \theta, \varphi)dv d\theta d\varphi$$

De este se tiene que el flujo de partículas sobre el muro: $\Phi = \frac{1}{4}n\langle v \rangle$. Para la presión en el muro se tienen:

$$d^3p = \frac{2mv \cos(\theta)d^3N}{A\tau}, \quad \text{so } p = \frac{2}{3}n\langle E \rangle$$

7.4 La ecuación de estado

Si las fuerzas intermoleculares y el volumen de las moléculas se pueden despreciar, para los gases, mediante $p = \frac{2}{3}n\langle E \rangle$ y $\langle E \rangle = \frac{3}{2}kT$ se obtiene:

$$pV = n_sRT = \frac{1}{3}Nm\langle v^2 \rangle$$

Aquí, n_s es el numero de partículas *molares* y N es el numero total de partículas dentro de un volumen V . Si el volumen y las fuerzas intermoleculares no pueden ser despreciadas la ecuación de *Van der Waals* puede obtenerse:

$$\left(p + \frac{an_s^2}{V^2}\right)(V - bn_s) = n_sRT$$

Existe una isoterma con un punto horizontal de inflexión. En la ecuación de Van der Waals esto corresponde con la *temperatura, presión y volumen críticos* y de un gas. Este es límite superior del ara de coexistencia entre líquido y vapor. Mediante $dp/dV = 0$ y $d^2p/dV^2 = 0$ obtenemos:

$$T_{\text{cr}} = \frac{8a}{27bR}, \quad p_{\text{cr}} = \frac{a}{27b^2}, \quad V_{\text{cr}} = 3bn_s$$

Para el punto critico se tiene: $p_{\text{cr}}V_{m,\text{cr}}/RT_{\text{cr}} = \frac{3}{8}$, que difiere del valor de 1, obtenido de la ley general.

Escalando en las cantidades criticas, con $p^* := p/p_{\text{cr}}$, $T^* = T/T_{\text{cr}}$ y $V_m^* = V_m/V_{m,\text{cr}}$ con $V_m := V/n_s$ obteniendo:

$$\left(p^* + \frac{3}{(V_m^*)^2}\right)(V_m^* - \frac{1}{3}) = \frac{8}{3}T^*$$

El comportamiento de los gases es igual sin importar una reducción en la cantidad: la *ley de estados correspondientes*. Una *expansión virial* es empleada para una observación más exacta:

$$p(T, V_m) = RT \left(\frac{1}{V_m} + \frac{B(T)}{V_m^2} + \frac{C(T)}{V_m^3} + \dots \right)$$

La *temperatura de Boyle* T_B es la temperatura para la que el segundo coeficiente virial es 0. En un gas de Van der Waals, esto sucede a $T_B = a/Rb$. La *temperatura de inversión* $T_i = 2T_B$.

La ecuación de estado para sólidos y líquidos es:

$$\frac{V}{V_0} = 1 + \gamma_p \Delta T - \kappa_T \Delta p = 1 + \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \Delta T + \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T \Delta p$$

7.5 Colisiones entre moléculas

La probabilidad de colisión de una partícula en un gas que es trasladada sobre una distancia dx es descrito por $n\sigma dx$, donde σ es *sección efectiva*. El camino libre medio se puede escribir como $\ell = \frac{v_1}{nu\sigma}$ con $u = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ la velocidad relativa entre las partículas. Si $m_1 \ll m_2$ obteniendo: $\frac{u}{v_1} = \sqrt{1 + \frac{m_1}{m_2}}$, así $\ell = \frac{1}{n\sigma}$. Si $m_1 = m_2$ tenemos: $\ell = \frac{1}{n\sigma\sqrt{2}}$. Esto significa que el promedio de tiempo entre dos colisiones es dado por $\tau = \frac{1}{n\sigma v}$. Si las moléculas son, aproximadamente, esferas duras, la sección efectiva es: $\sigma = \frac{1}{4}\pi(D_1^2 + D_2^2)$. La distancia promedio entre dos moléculas es $0.55n^{-1/3}$. Colisiones entre moléculas y pequeñas partículas en una solución resulta en el *movimiento Browniano*. Para el movimiento promedio de una partícula con radio R puede ser derivado que: $\langle x_i^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle r^2 \rangle = kTt/3\pi\eta R$.

Un gas es llamado un *gas de Knudsen* si $\ell \gg$ las dimensiones del gas, algo que puede ocurrir fácilmente a presiones bajas. La condición de equilibrio para un recipiente que tiene un hoyo con la superficie A en el que tiene que $\ell \gg \sqrt{A/\pi}$ es: $n_1\sqrt{T_1} = n_2\sqrt{T_2}$. Junto con la ley de gas general se tiene: $p_1/\sqrt{T_1} = p_2/\sqrt{T_2}$.

Si dos planos se mueven uno a lo largo del otro a una distancia d con velocidad w_x la *viscosidad* η es dada por: $F_x = \eta \frac{Aw_x}{d}$. El perfil de velocidad entre los planos en tal caso es $w(z) = zw_x/d$. Puede ser derivado que $\eta = \frac{1}{3}\rho\ell\langle v \rangle$ donde v es la *velocidad térmica*.

La conducción del calor en un gas sin movimiento es descrito por: $\frac{dQ}{dt} = \kappa A \left(\frac{T_2 - T_1}{d} \right)$, que resulta en un perfil de temperatura $T(z) = T_1 + z(T_2 - T_1)/d$. Puede ser derivada que $\kappa = \frac{1}{3}C_{mV}n\ell\langle v \rangle/N_A$. Also holds: $\kappa = C_V\eta$. Una mejor expresión para κ puede ser obtenida con la *corrección Eucken*: $\kappa = (1 + 9R/4c_{mV})C_V \cdot \eta$ con un error $<5\%$.

7.6 Interacción entre moléculas

Para interacción dipolar entre moléculas se puede encontrar que $U \sim -1/r^6$. Si la distancia entre moléculas se aproxima al diámetro molecular D una fuerza repulsora entre los electrones aparece en la nube electrónica. Tal fuerza puede ser descrita por $U_{\text{rep}} \sim \exp(-\gamma r)$ o $V_{\text{rep}} = +C_s/r^s$ con $12 \leq s \leq 20$. Esto resulta en el potencial de *Lennard-Jones* para fuerzas intermoleculares:

$$U_{\text{LJ}} = 4\epsilon \left[\left(\frac{D}{r} \right)^{12} - \left(\frac{D}{r} \right)^6 \right]$$

con un mínimo ϵ a $r = r_m$. Lo anterior resulta en: $D \approx 0.89r_m$. Para los coeficientes de Van der Waals a y b y las cantidades críticas se tiene: $a = 5.275N_A^2D^3\epsilon$, $b = 1.3N_AD^3$, $kT_{\text{kr}} = 1.2\epsilon$ y $V_{m,\text{kr}} = 3.9N_AD^3$.

Un modelo más simple para fuerzas intermoleculares asume un potencial $U(r) = \infty$ para $r < D$, $U(r) = U_{\text{LJ}}$ for $D \leq r \leq 3D$ and $U(r) = 0$ for $r \geq 3D$. De modo que la energía potencial de una molécula: $E_{\text{pot}} = \int_D^{3D} U(r)F(r)dr$.

con $F(r)$ la distribución espacial en coordenadas esféricas, que para una distribución homogénea se escribe: $F(r)dr = 4n\pi r^2 dr$.

Algunas relaciones matemáticas útiles son:

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n! \quad , \quad \int_0^\infty x^{2n} e^{-x^2} dx = \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{n! 2^{2n+1}} \quad , \quad \int_0^\infty x^{2n+1} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} n!$$

Chapter 8

Termodinámica

8.1 Introducción matemática

Si existe una relación $f(x, y, z) = 0$ entre tres variables, podemos escribir: $x = x(y, z)$, $y = y(x, z)$ y $z = z(x, y)$. La *diferencial total* dz de z es:

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_y dx + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_x dy$$

Al utilizar en la notación dx y dy obtenemos que:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_z \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)_x \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_y = -1$$

Porque dz es una diferencial total se tiene que $\oint dz = 0$.

Una función homogénea de grado m obedece a: $\varepsilon^m F(x, y, z) = F(\varepsilon x, \varepsilon y, \varepsilon z)$. Para tales funciones el teorema de Euler se puede aplicar:

$$mF(x, y, z) = x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} + z \frac{\partial F}{\partial z}$$

8.2 Definiciones

- El coeficiente de presión isocórica: $\beta_V = \frac{1}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V$
- La compresibilidad isotérmica: $\kappa_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T$
- El coeficiente volumétrico: $\gamma_p = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$
- La compresibilidad adiabática: $\kappa_S = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_S$

Para un gas ideal encontramos: $\gamma_p = 1/T$, $\kappa_T = 1/p$ and $\beta_V = -1/V$.

8.3 Thermal heat capacity

- El calor específico a constante X es: $C_X = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_X$
- El calor específico a presión constante: $C_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_p$
- El calor específico a volumen constante: $C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$

Para un gas ideal se tiene: $C_{mp} - C_{mV} = R$. Posteriormente, si la temperatura es suficientemente alta para termalizar todos los grados de rotacion rotacional y vibracional internos, obteniendo: $C_V = \frac{1}{2}sR$. He aqui que $C_p = \frac{1}{2}(s+2)R$. Para esta razon obtenemos $\gamma = (2+s)/s$. Para una menor T , necesitamos unicamente considerar los grados de libertad termicos. Para un gas de Van der Waals gas: $C_{mV} = \frac{1}{2}sR + ap/RT^2$.

En general tenemos:

$$C_p - C_V = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = -T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p^2 \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T \geq 0$$

Porque $(\partial p/\partial V)_T$ es siempre < 0 , lo siguiente es siempre valido: $C_p \geq C_V$. Si el coeficiente de expansion es 0, $C_p = C_V$, y tambien a $T = 0K$.

8.4 Las leyes de la termodinámica

La ley cero establece que el calor se transmite de zonas de temperatura alta hacia zonas de temperatura baja. La primera ley es la conservación de energía. Para un sistema cerrado tenemos: $Q = \Delta U + W$, donde Q es el calor total añadido, W es el trabajo neto realizado y ΔU es la diferencia de energía. Su forma diferencial es: $\vec{d}Q = dU + \vec{d}W$, donde \vec{d} significa que no es diferencial de una cantidad de estado. Para procesos cuasiestaticos tenemos: $\vec{d}W = pdV$. De este modo, para un proceso reversible: $\vec{d}Q = dU + pdV$.

Para un sistema abierto (en flujo) la primera ley es: $Q = \Delta H + W_i + \Delta E_{kin} + \Delta E_{pot}$. Podemos extraer una cantidad de trabajo W_t del sistema o añadir $W_t = -W_i$ al sistema.

La segunda ley establece: para un sistema cerrado que existe una cantidad aditiva S , llamada entropía, la forma diferencial de esta cantidad es:

$$dS \geq \frac{\vec{d}Q}{T}$$

Cuando los procesos son exclusivamente reversibles tenemos: $dS = \vec{d}Q_{rev}/T$. Así, la diferencia de entropía despues de un proceso reversible es:

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\vec{d}Q_{rev}}{T}$$

Así, para un ciclo reversible encontramos: $\oint \frac{\vec{d}Q_{rev}}{T} = 0$.

Asi, tenemos en un ciclo irreversible: $\oint \frac{\vec{d}Q_{irr}}{T} < 0$.

La tercera ley de termodinámica (Nernst) es:

$$\lim_{T \rightarrow 0} \left(\frac{\partial S}{\partial X} \right)_T = 0$$

De aquí, podemos concluir que la capacidad temica de calor $\rightarrow 0$ cundo $T \rightarrow 0$; así, la temperatura de cero absoluto no puede ser alcanzada por enfriamiento en un número finito de etapas.

8.5 funciones de estado y relaciones de Maxwell

Las cantidades de estado y sus diferenciales son:

Energía interna:	U	$dU = TdS - pdV$
Entalpía:	$H = U + pV$	$dH = TdS + Vdp$
Energía libre:	$F = U - TS$	$dF = -SdT - pdV$
Entalpía libre de Gibbs:	$G = H - TS$	$dG = -SdT + Vdp$

De este punto podemos derivar las relaciones de Maxwell:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T$$

Desde la diferencial neta y las definiciones de C_V y C_p , podemos derivar que:

$$TdS = C_V dT + T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dV \quad \text{and} \quad TdS = C_p dT - T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dp$$

Tenemos para un gas ideal:

$$S_m = C_V \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + R \ln\left(\frac{V}{V_0}\right) + S_{m0} \quad \text{and} \quad S_m = C_p \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) - R \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) + S'_{m0}$$

Las ecuaciones de sHelmholtz son:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p, \quad \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T = V - T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

Para una superficie expandida: $dW_{\text{rev}} = -\gamma dA$, donde γ es la tenison superficial. De donde obseamos:

$$\gamma = \left(\frac{\partial U}{\partial A}\right)_S = \left(\frac{\partial F}{\partial A}\right)_T$$

8.6 Procesos

La *eficiencia* η de un proceso es: $\eta = \frac{\text{Work done}}{\text{Heat added}}$

El *factor de enfriamiento* ξ en un proceso es: $\xi = \frac{\text{Cold delivered}}{\text{Work added}}$

Proceso adiabatico reversible

Para un proceso adiabatico se tiene: $W = U_1 - U_2$. Para procesos adiabaticos reversibles se tiene la ecuación de Poisson: con $\gamma = C_p/C_V$ obteniendo que $pV^\gamma = \text{constante}$. También, tenemos: $TV^{\gamma-1} = \text{constante}$ y $T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{constante}$. En Diagramas p - V las adaibataas muestran mayor pendiente que las isotermarmas, porque $\gamma > 1$.

Proceso isobarico

Aquí, tenemos: $H_2 - H_1 = \int_1^2 C_p dT$. Para un proceso isobarico reversible: $H_2 - H_1 = Q_{\text{rev}}$.

El proceso extrangulado

Este también es llamado el efecto *Joule-Kelvin* es una expansión adiabatica de un gas a través de un material poroso o una pequeña abertura. Aquí H es una cantidad conservada, y $dS > 0$. En general, se presenta un cambio de temperatura. La cantidad que es importante en el efect es el *coeficiente de extrangulamiento*:

$$\alpha_H = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H = \frac{1}{C_p} \left[T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - V \right]$$

La *inversion de temperatura* es la temperaura donde una expansion adiabatica de gas se mantiene a la misma temperatura. Si $T > T_i$ el gas se calienta, si $T < T_i$ el gas se enfria. $T_i = 2T_B$, para T_B : $[\partial(pV)/\partial p]_T = 0$. Se produce el proces de extrangulamiento, por ejemplo, en los refrigeradores.

The Carnot process

The system undergoes a reversible cycle with 2 isothemics and 2 adiabatics:

1. Expansión isotermica a T_1 . El sistema absorbe calor Q_1 del resorvorio.
2. expansión adiabatica con una temperatura que cae a T_2 .
3. Compresión isotermica a T_2 , removiendo Q_2 del sistema.
4. Compresión adiabatica a T_1 .

La eficiencia en un proceso de Carnot es:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_2|}{|Q_1|} = 1 - \frac{T_2}{T_1} := \eta_C$$

La *eficiencia de Carnot* η_C es la máxima eficiencia que una máquina térmica puede operar. Cuando el proceso es aplicado en orden inverso y el sistema desarrolla trabajo $-W$ el factor de enfriamiento es descrito por:

$$\xi = \frac{|Q_2|}{W} = \frac{|Q_2|}{|Q_1| - |Q_2|} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

El proceso Stirling

en el proceso de Stirling' existen 2 osotermia y 2 isocoricas. La eficiencia en el caso idela es la misma que el ciclo de Carnot.

8.7 Trabajo máximo y mínimo

Considere un sistema que cambia del estado 1 a un estado 2, con la temperatura y presión de los alrededores dada por T_0 y p_0 . El máximo trabajo que puede ser obtenido de este camibo es, cuando todo el proceso es reversible:

1. Sistema cerrado: $W_{\max} = (U_1 - U_2) - T_0(S_1 - S_2) + p_0(V_1 - V_2)$.
2. Sistema abierto: $W_{\max} = (H_1 - H_2) - T_0(S_1 - S_2) - \Delta E_{\text{kin}} - \Delta E_{\text{pot}}$.

El trabajo minimo necesaro para alcanzar cierto estado es: $W_{\min} = -W_{\max}$.

8.8 Transiciones de fase

Las transiciones de fase son isotermicas e isobaricas, de modo que $dG = 0$. Cuando las fases son indicadas por α , β y γ se tiene: $G_m^\alpha = G_m^\beta$ y

$$\Delta S_m = S_m^\alpha - S_m^\beta = \frac{r_{\beta\alpha}}{T_0}$$

donde $r_{\beta\alpha}$ es la transición de fase por el calor β para la fase α y T_0 es la transición de temperatura. Lo que resulta: $r_{\beta\alpha} = r_{\alpha\beta}$ y $r_{\beta\alpha} = r_{\gamma\alpha} - r_{\gamma\beta}$. Entonces

$$S_m = \left(\frac{\partial G_m}{\partial T} \right)_p$$

así G tiene una torcedura en el punto de transición. En un sistema de dos fases la ecuación de Clapeyron es valida:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{S_m^\alpha - S_m^\beta}{V_m^\alpha - V_m^\beta} = \frac{r_{\beta\alpha}}{(V_m^\alpha - V_m^\beta)T}$$

Para un gas ideal se encuentra para la línea de vapor a una distancia del punto crítico:

$$p = p_0 e^{-r_{\beta\alpha}/RT}$$

Existe otra transición de fase con $r_{\beta\alpha} = 0$. Para estos ocurre unicamente una discontinuidad en la segunda derivada de G_m . Esta transición de segundo orden aparecen en *fenómenos de organización*.

Un cambio de fase de tercer orden, con e.g. $[\partial^3 G_m / \partial T^3]_p$ non continuous arises e.g. when ferromagnetic iron changes to the paramagnetic state.

8.9 Potencial termodinámico

Cuando el número de partículas dentro del sistema cambia el numero se convierte en una tercera cualidad del estado. Porque la adicción de materia usualmente toma lugar una constante p y T , G es la cualidad relevante. Si un sistema existe de mas componentes este se convierte:

$$dG = -SdT + Vdp + \sum_i \mu_i dn_i$$

Donde $\mu = \left(\frac{\partial G}{\partial n_i} \right)_{p,T,n_j}$ es llamado el potencial termodinámico. Esto es una *cualidad parcial*. Para V obtenemos:

$$V = \sum_{i=1}^c n_i \left(\frac{\partial V}{\partial n_i} \right)_{n_j,p,T} := \sum_{i=1}^c n_i V_i$$

donde V_i es el volumen parcial de la componente i . el siguiente da:

$$\begin{aligned} V_m &= \sum_i x_i V_i \\ 0 &= \sum_i x_i dV_i \end{aligned}$$

donde $x_i = n_i/n$ es la fracción molar de la componente i . El volumen molar de una mezcla de dos componentes puede ser una línea cóncava en un diagrama $V-x_2$: la mezcla contrae el volumen .

Los potenciales termodinámicos no son independientes en una sistemas de fases múltiples. Se puede derivar que $\sum_i n_i d\mu_i = -SdT + Vdp$, esto da una constante p y T : $\sum_i x_i d\mu_i = 0$ (Gibbs-Duhmen).

Cada componente tiene tantas μ 's como fases. El numero de parámetros libres en un sistema con c componenete y p diferentes fases es dado por $f = c + 2 - p$.

8.10 Mezclas ideales

Para una mezcla de n componentes se tiene (el índice 0 es el valor para la componente pura):

$$U_{\text{mixture}} = \sum_i n_i U_i^0, \quad H_{\text{mixture}} = \sum_i n_i H_i^0, \quad S_{\text{mixture}} = n \sum_i x_i S_i^0 + \Delta S_{\text{mix}}$$

donde para gases ideales se tiene: $\Delta S_{\text{mix}} = -nR \sum_i x_i \ln(x_i)$.

Para potenciales termodinámicos se tiene: $\mu_i = \mu_i^0 + RT \ln(x_i) < \mu_i^0$. Una mezcla de dos líquidos es raramente ideal: esto es usualmente sólo en el caso para componentes químicamente relacionados o isotopos. In spite of this holds Raoult's law for the vapour pressure holds for many binary mixtures: $p_i = x_i p_i^0 = y_i p$. Here is x_i the fraction of the i th component in liquid phase and y_i the fraction of the i th component in gas phase.

Una solución de una componente en otra tiene como consecuencia el aumento en el punto de ebullición ΔT_k y un decremento de el punto de congelación ΔT_s . Para $x_2 \ll 1$ tenemos:

$$\Delta T_k = \frac{RT_k^2}{r_{\beta\alpha}} x_2, \quad \Delta T_s = -\frac{RT_s^2}{r_{\gamma\beta}} x_2$$

with $r_{\beta\alpha}$ the evaporation heat and $r_{\gamma\beta} < 0$ the melting heat. For the *osmotic pressure* Π of a solution holds: $\Pi V_{m1}^0 = x_2 RT$.

8.11 Condiciones de equilibrio

Cuando un sistema evoluciona hacia el equilibrio el unico cambio que es posible son aquellos para los que se tiene: $(dS)_{U,V} \geq 0$ o $(dU)_{S,V} \leq 0$ o $(dH)_{S,p} \leq 0$ o $(dF)_{T,V} \leq 0$ o $(dG)_{T,p} \leq 0$. En equilibrio para cada componente se tiene: $\mu_i^\alpha = \mu_i^\beta = \mu_i^\gamma$.

8.12 Bases estadísticas para la termodinámica

El número de posibilidades P para distribuir N partículas en n posibles niveles de energía, cada uno con una degeneración en el doblamiento g es llamado la probabilidad termodinámica y es dado por:

$$P = N! \prod_i \frac{g_i^{n_i}}{n_i!}$$

La más probable distribución, que con el máximo valor para P , es el *estado de equilibrio*. Cuando la ecuación de Stirling, $\ln(n!) \approx n \ln(n) - n$ es utilizada, se encuentra que para un sistema discreto la distribución de Maxwell-Boltzmann. Los números de ocupación en equilibrio son dados por:

$$n_i = \frac{N}{Z} g_i \exp\left(-\frac{W_i}{kT}\right)$$

La *suma del estado* Z es una normalizacion constante, descrita por: $Z = \sum_i g_i \exp(-W_i/kT)$. Para un gas ideal se tiene:

$$Z = \frac{V(2\pi mkT)^{3/2}}{h^3}$$

La *entropía* puede ser definida como: $S = k \ln(P)$. Para un sistema termodinamico el equilibrio es:

$$S = \frac{U}{T} + kN \ln\left(\frac{Z}{N}\right) + kN \approx \frac{U}{T} + k \ln\left(\frac{Z^N}{N!}\right)$$

Para un gas ideal, con $U = \frac{3}{2}kT$ tenemos: $S = \frac{5}{2}kN + kN \ln\left(\frac{V(2\pi mkT)^{3/2}}{Nh^3}\right)$

8.13 Aplicaciones a otros sistemas termodinamicos

La termodinamica puede ser aplicada a otros sistemas, aparte del gas ideal. Para realizarlo el término $\vec{d}W = pdV$ debe de ser remplazda con el término correcto de trabajo, como $\vec{d}W_{\text{rev}} = -Fdl$ para el estiramiento de un alambre, $\vec{d}W_{\text{rev}} = -\gamma dA$ para la expansion de una burbuja de jabón, o $\vec{d}W_{\text{rev}} = -BdM$ para un sistema magnetico.

Un agujero negro (rotatorio y no cargado electricamente) tiene una temperatura de $T = \hbar c/8\pi km$. Este tiene una entropia de $S = Akc^3/4\hbar\kappa$ donde A es el area de su horizonte de eventos. Para un hoyo negro tipo Schwarzschild A es igual a $A = 16\pi m^2$. El teorema de area de Hawking establece que $dA/dt \geq 0$.

Aqui, el tiempo de vida del agujero negro es $\sim m^3$.

Chapter 9

Fenómenos de transporte

9.1 Introducción matemática

Una relación importante es: si X es una cantidad de un elemento de volumen que viaja de una posición \vec{r} a $\vec{r} + d\vec{r}$ en un tiempo dt , la diferencial total dX es descrita por:

$$dX = \frac{\partial X}{\partial x} dx + \frac{\partial X}{\partial y} dy + \frac{\partial X}{\partial z} dz + \frac{\partial X}{\partial t} dt \Rightarrow \frac{dX}{dt} = \frac{\partial X}{\partial x} v_x + \frac{\partial X}{\partial y} v_y + \frac{\partial X}{\partial z} v_z + \frac{\partial X}{\partial t}$$

Se puede escribir en general to: $\boxed{\frac{dX}{dt} = \frac{\partial X}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)X}$.

De aquí también se obtiene: $\boxed{\frac{d}{dt} \iiint X d^3V = \frac{\partial}{\partial t} \iiint X d^3V + \oint X(\vec{v} \cdot \vec{n}) d^2A}$

donde el volumen V es rodeado por la superficie A . Algunas propiedades del operador ∇ son:

$$\begin{array}{lll} \text{div}(\phi \vec{v}) = \phi \text{div} \vec{v} + \text{grad} \phi \cdot \vec{v} & \text{rot}(\phi \vec{v}) = \phi \text{rot} \vec{v} + (\text{grad} \phi) \times \vec{v} & \text{rot grad} \phi = \vec{0} \\ \text{div}(\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{v} \cdot (\text{rot} \vec{u}) - \vec{u} \cdot (\text{rot} \vec{v}) & \text{rot rot} \vec{v} = \text{grad div} \vec{v} - \nabla^2 \vec{v} & \text{div rot} \vec{v} = 0 \\ \text{div grad} \phi = \nabla^2 \phi & \nabla^2 \vec{v} \equiv (\nabla^2 v_1, \nabla^2 v_2, \nabla^2 v_3) & \end{array}$$

Aquí, \vec{v} es un campo vectorial arbitrario ϕ un campo escalar arbitrario. Algunos teoremas integrales importantes son:

$$\text{Gauss:} \quad \oint (\vec{v} \cdot \vec{n}) d^2A = \iiint (\text{div} \vec{v}) d^3V$$

$$\text{Stokes para un campo escalar:} \quad \oint (\phi \cdot \vec{e}_t) ds = \iint (\vec{n} \times \text{grad} \phi) d^2A$$

$$\text{Stokes para el campo vectorial:} \quad \oint (\vec{v} \cdot \vec{e}_t) ds = \iint (\text{rot} \vec{v} \cdot \vec{n}) d^2A$$

$$\text{Esto resulta en:} \quad \oint (\text{rot} \vec{v} \cdot \vec{n}) d^2A = 0$$

$$\text{Ostrogradsky:} \quad \oint (\vec{n} \times \vec{v}) d^2A = \iiint (\text{rot} \vec{v}) d^3V$$

$$\oint (\phi \vec{n}) d^2A = \iiint (\text{grad} \phi) d^3V$$

Aquí, la superficie orientable $\iint d^2A$ es limitada por la curva de Jordan $\oint ds$.

9.2 Leyes de la conservación

Sobre un volumen se presentan dos tipos de fuerzas:

1. La fuerza \vec{f}_0 sobre cada elemento de volumen. Por la gravedad tenemos: $\vec{f}_0 = \rho \vec{g}$.
2. Fuerzas de superficie actuando únicamente sobre los márgenes: \vec{t} . Para los que se tiene: $\vec{t} = \vec{n} \mathbf{T}$, donde \mathbf{T} es el *tensor de stress*.

\mathbf{T} podemos separar en una parte $p\mathbf{I}$ representando las tensiones normales y la parte \mathbf{T}' representando la shear stresses: $\mathbf{T} = \mathbf{T}' + p\mathbf{I}$, donde \mathbf{I} es el tensor unitario. Donde los aspectos de la viscosidad pueden ser ignorados, obteniendo: $\text{div}\mathbf{T} = -\text{grad}p$.

Donde el flujo de la velocidad es \vec{v} en la posición \vec{r} permaneciendo en la posición $\vec{r} + d\vec{r}$:

$$\vec{v}(d\vec{r}) = \underbrace{\vec{v}(\vec{r})}_{\text{translation}} + \underbrace{d\vec{r} \cdot (\text{grad}\vec{v})}_{\text{rotation, deformation, dilatation}}$$

La cantidad $\mathbf{L} := \text{grad}\vec{v}$ puede ser separada en una parte simétrica \mathbf{D} and y una parte antisimétrica \mathbf{W} . $\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W}$ con

$$D_{ij} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad W_{ij} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

Donde la rotación o *vorticidad* $\vec{\omega} = \text{rot}\vec{v}$ es introducida, dando: $W_{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\omega_k$. $\vec{\omega}$ representa la velocidad de rotación local: $d\vec{r} \cdot \mathbf{W} = \frac{1}{2}\vec{\omega} \times d\vec{r}$.

Para un *liquido newtoniano* tenemos: $\mathbf{T}' = 2\eta\mathbf{D}$. Aquí, η es la viscosidad dinámica. Este es relacionado con el shear stress τ por:

$$\tau_{ij} = \eta \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

Para medios compresibles podemos establecer: $\mathbf{T}' = (\eta' \text{div}\vec{v})\mathbf{I} + 2\eta\mathbf{D}$. Por acoplar (igualar) la presión mecánica y termodinámica se obtiene: $3\eta' + 2\eta = 0$. Si la viscosidad constante, se tiene: $\text{div}(2\mathbf{D}) = \nabla^2\vec{v} + \text{grad div}\vec{v}$.

Las leyes de conservación de masa, momentum y energía para medios continuos pueden ser escritos tanto de modo integral como de modo diferencial. Las que son:

Notación integral:

1. Conservación de la masa: $\frac{\partial}{\partial t} \iiint \varrho d^3V + \oint \varrho(\vec{v} \cdot \vec{n}) d^2A = 0$
2. Conservación del momentum: $\frac{\partial}{\partial t} \iiint \varrho \vec{v} d^3V + \oint \varrho \vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{n}) d^2A = \iiint \vec{f}_0 d^3V + \oint \vec{n} \cdot T d^2A$
3. Conservación de la energía: $\frac{\partial}{\partial t} \iiint (\frac{1}{2}v^2 + e) \varrho d^3V + \oint (\frac{1}{2}v^2 + e) \varrho(\vec{v} \cdot \vec{n}) d^2A =$
 $- \oint (\vec{q} \cdot \vec{n}) d^2A + \iiint (\vec{v} \cdot \vec{f}_0) d^3V + \oint (\vec{v} \cdot \vec{n}) \mathbf{T} d^2A$

Notación diferencial:

1. Conservación de la masa: $\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \text{div} \cdot (\varrho \vec{v}) = 0$
2. Conservación del momentum: $\varrho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\varrho \vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \vec{f}_0 + \text{div}\mathbf{T} = \vec{f}_0 - \text{grad}p + \text{div}\mathbf{T}'$
3. Conservación de la energía: $\varrho T \frac{ds}{dt} = \varrho \frac{de}{dt} - \frac{p}{\varrho} \frac{d\varrho}{dt} = -\text{div}\vec{q} + \mathbf{T}' : \mathbf{D}$

Aquí, e es la energía interna por unidad de masa E/m y s es la entropía por unidad de masa S/m . $\vec{q} = -\kappa \vec{\nabla}T$ es el flujo de calor. Obteniéndose:

$$p = -\frac{\partial E}{\partial V} = -\frac{\partial e}{\partial (1/\varrho)}, \quad T = \frac{\partial E}{\partial S} = \frac{\partial e}{\partial s}$$

so

$$C_V = \left(\frac{\partial e}{\partial T} \right)_V \quad \text{and} \quad C_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p$$

con $h = H/m$ la entalpía por unidad de masa.

De éste se puede derivar las ecuaciones de *Navier-Stokes* para un medio incomprensible, viscoso y conductor de calor:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{v} &= 0 \\ \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} &= \rho \vec{g} - \operatorname{grad} p + \eta \nabla^2 \vec{v} \\ \rho C \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C(\vec{v} \cdot \nabla) T &= \kappa \nabla^2 T + 2\eta \mathbf{D} : \mathbf{D}\end{aligned}$$

con C la capacidad térmica. La fuerza \vec{F} sobre un objeto con un flujo, cuando los efectos son limitados por las fronteras, pueden ser obtenidas utilizando la ley de momentum. Si una superficie A rodea un objeto se tiene en la frontera:

$$\vec{F} = - \oint [p\vec{n} + \rho \vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{n})] d^2 A$$

9.3 Ecuación de Bernoulli

Comenzando con la ecuación de momentum podemos encontrar un medio no viscosos con un flujo estacionario, con

$$(\vec{v} \cdot \operatorname{grad}) \vec{v} = \frac{1}{2} \operatorname{grad}(v^2) + (\operatorname{rot} \vec{v}) \times \vec{v}$$

Y la ecuación potencial $\vec{g} = -\operatorname{grad}(gh)$ que:

$$\frac{1}{2} v^2 + gh + \int \frac{dp}{\rho} = \text{constant along a streamline}$$

Para fluidos compresibles: $\frac{1}{2} v^2 + gh + p/\rho = \text{constante}$ a lo largo de la línea de flujo. Si además se tiene $\operatorname{rot} \vec{v} = 0$ y la entropía es igual en cada línea de flujo obteniendo $\frac{1}{2} v^2 + gh + \int dp/\rho = \text{constante}$ en todas partes. Para fluidos incomprensibles se tiene: $\frac{1}{2} v^2 + gh + p/\rho = \text{constante}$ en todas partes. Para un gas ideal con constante C_p y C_V se tiene, con $\gamma = C_p/C_V$:

$$\frac{1}{2} v^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} = \frac{1}{2} v^2 + \frac{c^2}{\gamma - 1} = \text{constant}$$

Con una velocidad potencial definida por $\vec{v} = \operatorname{grad} \phi$ teniéndose para un flujo no estacionario:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + gh + \int \frac{dp}{\rho} = \text{constante en todas partes}$$

9.4 Caracterización de flujos por números adimensionales

La ventaja de números adimensionales es que permiten elaborar modelos experimentales: uno debe emplear los números adimensionales que son importa tantees para un experimento específico igual para el modelo y la situación real. Uno puede también deducir funciones sin resolver la ecuación diferencial. Algunos números adimensionales son:

$$\begin{array}{llll} \text{Strouhal:} & \text{Sr} = \frac{\omega L}{v} & \text{Froude:} & \text{Fr} = \frac{v^2}{gL} & \text{Mach:} & \text{Ma} = \frac{v}{c} \\ \text{Fourier:} & \text{Fo} = \frac{a}{\omega L^2} & \text{Péclet:} & \text{Pe} = \frac{vL}{a} & \text{Reynolds:} & \text{Re} = \frac{vL}{\nu} \\ \text{Prandtl:} & \text{Pr} = \frac{\nu}{a} & \text{Nusselt:} & \text{Nu} = \frac{L\alpha}{\kappa} & \text{Eckert:} & \text{Ec} = \frac{v^2}{c\Delta T} \end{array}$$

Aquí, $\nu = \eta/\rho$ es la *viscosidad cinemática*, c es la velocidad del sonido y L es la longitud característica del sistema. α Seguido de la ecuación para el transporte de calor $\kappa \partial_y T = \alpha \Delta T$ y $a = \kappa/\rho c$ es coeficiente de difusión térmica.

Estos números pueden ser interpretados de la siguiente forma:

- Re: (fuerza inerciales estacionarias)/(fuerzas viscosas)
- Sr: (fuerzas inerciales no estacionarias)/(fuerzas inerciales estacionarias)
- Fr: (fuerzas inerciales estacionarias)/(gravitación)
- Fo: (conducción de calor)/(cambio no estacionario en la entalpia)
- Pe: (transporte convectivo del calor)/(conductancia del calor)
- Ec: (disipación viscosa)/(transporte convectivo del calor)
- Ma: (velocidad)/(velocidad del sonido): objetos moviéndose más rápido que aproximadamente $Ma = 0,8$ produce ondas de choque que se propaga con un ángulo θ con la velocidad del objeto. Para este ángulo se tiene $Ma = 1/\arctan(\theta)$.
- Pr y Nu estan relacionados para materiales específicos.

Ahora, la ecuación adimensional de Navier-Stokes se transforma, con $x' = x/L$, $\vec{v}' = \vec{v}/V$, $\text{grad}' = L\text{grad}$, $\nabla'^2 = L^2\nabla^2$ and $t' = t\omega$:

$$\text{Sr} \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t'} + (\vec{v}' \cdot \nabla') \vec{v}' = -\text{grad}' p + \frac{\vec{g}}{\text{Fr}} + \frac{\nabla'^2 \vec{v}'}{\text{Re}}$$

9.5 Flujo tubular

Para un tubo el flujo es: es laminar si $\text{Re} < 2300$ con dimensión de longitud en el diámetro del tubo, y turbulento si Re es más grande. Para un flujo laminar incompresible a través de una línea, un tubo circular presenta un perfil de velocidad:

$$v(r) = -\frac{1}{4\eta} \frac{dp}{dx} (R^2 - r^2)$$

Para un flujo del volumen se tiene: $\Phi_V = \int_0^R v(r) 2\pi r dr = -\frac{\pi}{8\eta} \frac{dp}{dx} R^4$

La longitud de entrada L_e es dado por:

1. $500 < \text{Re}_D < 2300$: $L_e/2R = 0.056\text{Re}_D$
2. $\text{Re} > 2300$: $L_e/2R \approx 50$

Para el transporte de un gas a una presión baja (un gas de Knudsen) se tiene: $\Phi_V = \frac{4R^3\alpha\sqrt{\pi}}{3} \frac{dp}{dx}$

Para el flujo pequeño Re se tiene: $\nabla p = \eta \nabla^2 \vec{v}$ and $\text{div} \vec{v} = 0$. Para la fuerza total sobre una esfera con radio R en un flujo entonces se tiene: $F = 6\pi\eta Rv$. Para una Re grande, se tiene para la fuerza sobre una superficie A : $F = \frac{1}{2}C_W A \rho v^2$.

9.6 Teoría del potencial

La circulación Γ es definida como: $\Gamma = \oint (\vec{v} \cdot \vec{e}_t) ds = \iint (\text{rot} \vec{v}) \cdot \vec{n} d^2 A = \iint (\vec{\omega} \cdot \vec{n}) d^2 A$

Para un medio no viscoso, si $p = p(\varrho)$ y todas las fuerzas son conservativas, el teorema de Kelvin puede ser derivado:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0$$

Para flujos no rotacionales un potencial de velocidad $\vec{v} = \text{grad} \phi$ puede ser introducido. En el caso incompresible se tiene de la conservación de la masa $\nabla^2 \phi = 0$. Para un flujo bidimensional una

función de flujo $\psi(x, y)$ puede ser definido: con Φ_{AB} la cantidad de liquido fluyendo a través de la curva s entre los puntos A y B:

$$\Phi_{AB} = \int_A^B (\vec{v} \cdot \vec{n}) ds = \int_A^B (v_x dy - v_y dx)$$

Y las definiciones $v_x = \partial\psi/\partial y$, $v_y = -\partial\psi/\partial x$ obteniendo: $\Phi_{AB} = \psi(B) - \psi(A)$. En general se obtiene:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega_z$$

En coordenadas polares se tiene:

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}$$

Para una fuente de flujo ocon una potencia Q en $(x, y) = (0, 0)$ se tiene: $\phi = \frac{Q}{2\pi} \ln(r)$ so that $v_r = Q/2\pi r$, $v_\theta = 0$.

Para un dipolo de intensidad Q en $x = a$ y una intensidad $-Q$ en $x = -a$ se sigue de la superposición: $\phi = -Qax/2\pi r^2$ donde Qa es la intesidad del dipolo. Para un vértice se obtiene: $\phi = \Gamma\theta/2\pi$.

Si un objeto es rodeado por un flujo principal con $\vec{v} = v\vec{e}_x$ y es tan grande como Re , los efectos de la viscosidad son limitados por la frontera, obteniéndose: $F_x = 0$ y $F_y = -\rho\Gamma v$. La declaración de que $F_x = 0$ es la paradoja de d'Alembert y origina de la de la negación de los efectos de la viscosidad. The lift F_y is also created by η because $\Gamma \neq 0$ due to viscous effects. Henxe rotating bodies also create a force perpendicular to their direction of motion: the *Magnus effect*.

9.7 Capas de la frontera

9.7.1 flujo de capas de fronteras

Si para el espesor de una capa de frontera se tiene: $\delta \ll L$ obteniendo: $\delta \approx L/\sqrt{Re}$. Con v_∞ la velocidad del principal flujo se sigue para la velocidad $v_y \perp$ la superficie: $v_y L \approx \delta v_\infty$. La ecuación de Blasius para la capa de fronteras es, con $v_y/v_\infty = f(y/\delta)$: $2f''' + ff'' = 0$ con condiciones de frontera $f(0) = f'(0) = 0$, $f'(\infty) = 1$. Para lo que se tiene: $C_W = 0.664 Re_x^{-1/2}$.

El teorema de momentum de Von Karman para la capa de la frontera es: $\frac{d}{dx}(\vartheta v^2) + \delta^* v \frac{dv}{dx} = \frac{\tau_0}{\rho}$

donde el desplazamiento del espesor $\delta^* v$ y el espesor del momentum ϑv^2 es dado por:

$$\vartheta v^2 = \int_0^\infty (v - v_x) v_x dy, \quad \delta^* v = \int_0^\infty (v - v_x) dy \quad \text{and} \quad \tau_0 = -\eta \left. \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|_{y=0}$$

The boundary layer is released from the surface if $\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=0} = 0$. This is equivalent with $\frac{dp}{dx} = \frac{12\eta v_\infty}{\delta^2}$.

9.7.2 Temperatura de capas de fronteras

If the thickness of the temperature boundary layer $\delta_T \ll L$ holds:

1. If $Pr \leq 1$: $\delta/\delta_T \approx \sqrt{Pr}$.
2. If $Pr \gg 1$: $\delta/\delta_T \approx \sqrt[3]{Pr}$.

9.8 Conductancia del calor

Para una conductancia no estacionaria del calor en una dimension sin flujo se tiene:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \Phi$$

donde Φ es un termino que representa a la fuente. Si $\Phi = 0$ las soluciones para oscilaciones armónicas donde $x = 0$ son:

$$\frac{T - T_\infty}{T_{\max} - T_\infty} = \exp\left(-\frac{x}{D}\right) \cos\left(\omega t - \frac{x}{D}\right)$$

con $D = \sqrt{2\kappa/\omega\rho c}$. en $x = \pi D$ la varicion de temperatura es un fase contraria con la superficie. La solucion unidimensional para $\Phi = 0$ es

$$T(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right)$$

Esto es matemáticamente equivalente al problema de difusión:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\nabla^2 n + P - A$$

donde P es la producción y A es la descarga de partículas. La densidad de flujo $J = -D\nabla n$.

9.9 Turbulencia

La escala de tiempo de las variaciones de velocidad de la turbulencia τ_t es del orden de: $\tau_t = \tau\sqrt{\text{Re}}/\text{Ma}^2$ con τ la escala de tiempo molecular. Para la velocidad de las particulazas, se tiene: $v(t) = \langle v \rangle + v'(t)$ with $\langle v'(t) \rangle = 0$. La ecuación de The Navier-Stokes ahora se convierte en:

$$\frac{\partial \langle \vec{v} \rangle}{\partial t} + (\langle \vec{v} \rangle \cdot \nabla) \langle \vec{v} \rangle = -\frac{\nabla \langle p \rangle}{\rho} + \nu \nabla^2 \langle \vec{v} \rangle + \frac{\text{div} \mathbf{S}_R}{\rho}$$

donde $\mathbf{S}_{Rij} = -\rho \langle v_i v_j \rangle$ es el tensor de stress de turbulencia. La suposición de Boussinesq es: $\tau_{ij} = -\rho \langle v'_i v'_j \rangle$. Estableciendo que, analogon a medios Newtonianos: $\mathbf{S}_R = 2\rho\nu_t \langle \mathbf{D} \rangle$. Cerca de las fronteras se tiene: $\nu_t = 0$, lejos de las fronteras se obtiene: $\nu_t \approx \nu \text{Re}$.

9.10 Auto organización

Para una (semi) bidimensional flujo se tiene: $\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\omega, \psi) = \nu \nabla^2 \omega$

Con $J(\omega, \psi)$ el Jacobiano. Así si $\nu = 0$, ω es conservado. Posteriormente, la energía cinética $/mA$ y la entropía V son conservadas: con $\vec{v} = \nabla \times (\vec{k}\psi)$

$$E \sim (\nabla \psi)^2 \sim \int_0^\infty \mathcal{E}(k, t) dk = \text{constant} \quad , \quad V \sim (\nabla^2 \psi)^2 \sim \int_0^\infty k^2 \mathcal{E}(k, t) dk = \text{constante}$$

Para este se obtiene que en dos dimensiones el flujo de energía es de grandes valores de k : mayores estructuras se convierten para grandes que se expanden. En flujos de tres dimensiones es justo lo opuesto.

Chapter 10

Física cuántica

10.1 Introducción a la física cuántica

10.1.1 Radiación de cuerpo negro

La ley de Planck para una distribución de energía emitida por un cuerpo negro es:

$$w(f) = \frac{8\pi h f^3}{c^3} \frac{1}{e^{hf/kT} - 1} \quad , \quad w(\lambda) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$$

La ley de Stefan-Boltzmann para la densidad del poder neto puede ser derivada de esta fórmula: $P = A\sigma T^4$. La ley de Wien para el máximo puede ser también derivada de esta expresión: $T\lambda_{\max} = k_W$.

10.1.2 El efecto Compton

Para una longitud de onda de luz esparcida, la luz es considerada compuesta por partículas, podemos obtener:

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{mc}(1 - \cos \theta) = \lambda + \lambda_C(1 - \cos \theta)$$

10.1.3 Difracción de electrones

La difracción de electrones en un cristal puede ser explicada asumiendo que las partículas tienen un carácter ondulatorio con longitud de onda $\lambda = h/p$. Esta longitud de onda es llamada longitud de onda de Broglie.

10.2 funciones de onda

El carácter ondulatorio de las partículas es descrito por la función de onda ψ . Esta función de onda es descrita en un espacio normal o en un espacio de impulso. Ambas definiciones son transformaciones de Fourier reciprocas:

$$\Phi(k, t) = \frac{1}{\sqrt{h}} \int \Psi(x, t) e^{-ikx} dx \quad \text{y} \quad \Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{h}} \int \Phi(k, t) e^{ikx} dk$$

Estas ondas son definidas a una partícula, con una velocidad de grupo $v_g = p/m$ y energía $E = \hbar\omega$.

La función de onda puede ser interpretada como una medición de probabilidad P para encontrar una partícula en alguna posición (Born): $dP = |\psi|^2 d^3V$. El valor de expectación $\langle f \rangle$ de la cantidad f de un sistema es dado por:

$$\langle f(t) \rangle = \iiint \Psi^* f \Psi d^3V \quad , \quad \langle f_p(t) \rangle = \iiint \Phi^* f \Phi d^3V_p$$

La que se puede escribir también como $\langle f(t) \rangle = \langle \Phi | f | \Phi \rangle$. La condición de normalización para funciones de onda sigue de: $\langle \Phi | \Phi \rangle = \langle \Psi | \Psi \rangle = 1$.

10.3 Operadores en física cuántica

En mecánica cuántica, las cantidades clásicas son transformadas como operadores. Estos operadores son hermitianos porque sus valores propios son reales:

$$\int \psi_1^* A \psi_2 d^3V = \int \psi_2 (A \psi_1)^* d^3V$$

Cuando u_n es una función propia de los valores propios de la ecuación $A\Psi = a\Psi$ para valores propios a_n , Ψ puede ser expandido en base a una función de valores propios: $\Psi = \sum_n c_n u_n$. Si estas bases son tomadas como ortonormales, se tiene para los coeficientes: $c_n = \langle u_n | \Psi \rangle$. Si el sistema es en un estado descrito por Ψ , la oportunidad de encontrar el valor propio a_n cuando medimos A es dado por $|c_n|^2$ en la parte discreta del espectro y $|c_n|^2 da$ en la parte continua del espectro entre a y $a + da$. La *matriz de elementos* A_{ij} es dado por: $A_{ij} = \langle u_i | A | u_j \rangle$. Porque $(AB)_{ij} = \langle u_i | AB | u_j \rangle = \langle u_i | A \sum_n | u_n \rangle \langle u_n | B | u_j \rangle$ Obteniendo: $\sum_n |u_n\rangle \langle u_n| = 1$.

La dependencia en el tiempo de un operador es dado por (Heisenberg):

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{[A, H]}{i\hbar}$$

con $[A, B] \equiv AB - BA$ el *conmutador* de A y B . Para operadores hermitianos el conmutador siempre es complejo. Cuando $[A, B] = 0$, los operadores A y B tiene un conjunto común de funciones propias. Al aplicar esto a p_x y x de forma que obtenemos (Ehrenfest): $m d^2 \langle x \rangle_t / dt^2 = - \langle dU(x)/dx \rangle$.

El primer orden de aproximación $\langle F(x) \rangle_t \approx F(\langle x \rangle)$, con $F = -dU/dx$ representa la ecuación clásica.

Antes de la adición de los operadores en la mecánica cuántica, que son el producto de otros operadores, ellos deben ser hechos simétricos: un producto clásico AB se transforma en $\frac{1}{2}(AB + BA)$.

10.4 El principio de incertidumbre

Si la incertidumbre ΔA in A es definida como: $(\Delta A)^2 = \langle \psi | A_{\text{op}} - \langle A \rangle |^2 \psi \rangle = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$ se tiene que:

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2} | \langle \psi | [A, B] | \psi \rangle |$$

De lo que se obtiene: $\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{1}{2} \hbar$, y porque $[x, p_x] = i\hbar$ es decir: $\Delta p_x \cdot \Delta x \geq \frac{1}{2} \hbar$, y $\Delta L_x \cdot \Delta L_y \geq \frac{1}{2} \hbar L_z$.

10.5 La ecuación de Schrödinger

El operador de impulso es descrito por: $p_{\text{op}} = -i\hbar \nabla$. El operador de posición es: $x_{\text{op}} = i\hbar \nabla_p$. El operador de energía es dado por: $E_{\text{op}} = i\hbar \partial / \partial t$. El hamiltoniano de una partícula con masa m , la energía potencial U y la energía total E es dada por: $H = p^2/2m + U$. De $H\psi = E\psi$ se obtiene la *ecuación de Schrödinger*:

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + U\psi = E\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}}$$

La combinación lineal de las soluciones de esta ecuación resulta en la solución general. Ésto es para una dimensión:

$$\psi(x, t) = \left(\sum + \int dE \right) c(E) u_E(x) \exp \left(-\frac{iEt}{\hbar} \right)$$

La densidad de corriente J es descrita por: $J = \frac{\hbar}{2im} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$

La ley de conservación da: $\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = -\nabla J(x, t)$

10.6 Paridad

El operador de paridad en una dimensión es descrito por $\mathcal{P}\psi(x) = \psi(-x)$. Si la función de onda es dividida en funciones pares e impares, puede ser expandida en funciones propias de \mathcal{P} :

$$\psi(x) = \underbrace{\frac{1}{2}(\psi(x) + \psi(-x))}_{\text{par: } \psi^+} + \underbrace{\frac{1}{2}(\psi(x) - \psi(-x))}_{\text{impar: } \psi^-}$$

$[\mathcal{P}, H] = 0$. Las funciones $\psi^+ = \frac{1}{2}(1 + \mathcal{P})\psi(x, t)$ y $\psi^- = \frac{1}{2}(1 - \mathcal{P})\psi(x, t)$ ambos satisfacen la ecuación de Schrödinger. Luego, la paridad es conservada.

10.7 El efecto túnel

La función de onda de una partícula en un potencial de barrera con altura ∞ de $x = 0$ a $x = a$ es dado por $\psi(x) = a^{-1/2} \sin(kx)$. Los niveles de energía es dado por $E_n = n^2 \hbar^2 / 8a^2 m$.

Si la función de onda con energía W se encuentra con el potencial de pozo de $W_0 > W$ la función de onda será, improbable en el caso clásico, no-cero dentro del potencial del pozo. Si 1, 2 y 3 son las áreas en el frente, dentro y detrás del potencial de pozo, se obtiene:

$$\psi_1 = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, \quad \psi_2 = Ce^{ik'x} + De^{-ik'x}, \quad \psi_3 = A'e^{ikx}$$

con $k'^2 = 2m(W - W_0)/\hbar^2$ y $k^2 = 2mW$. Utilizando las condiciones de frontera requiriéndose continuidad: ψ = continuo y $\partial\psi/\partial x$ = continuos en $x = 0$ y $x = a$ dando B , C y D y A' expresada en A . La amplitud T de la onda transmitida es definida por $T = |A'|^2/|A|^2$. Si $W > W_0$ y $2a = n\lambda'$ = $2\pi n/k'$ obteniéndose: $T = 1$.

10.8 El oscilador armónico

Para un oscilador armónico se obtiene: $U = \frac{1}{2}bx^2$ y $\omega_0^2 = b/m$. El hamiltoniano H es dado por:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \frac{1}{2}\hbar\omega + \omega A^\dagger A$$

con

$$A = \sqrt{\frac{1}{2}m\omega}x + \frac{ip}{\sqrt{2m\omega}} \quad \text{y} \quad A^\dagger = \sqrt{\frac{1}{2}m\omega}x - \frac{ip}{\sqrt{2m\omega}}$$

$A \neq A^\dagger$ no es hermitiano. $[A, A^\dagger] = \hbar$ y $[A, H] = \hbar\omega A$. A es llamado *operador de ascenso*, A^\dagger es un *operador de descenso*. $H A u_E = (E - \hbar\omega) A u_E$. Hay una función propia u_0 para la que se tiene: $A u_0 = 0$. La energía en este estado basal es $\frac{1}{2}\hbar\omega$: el punto de energía cero. Para la función propia normalizada se tiene:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\frac{A^\dagger}{\sqrt{\hbar}} \right)^n u_0 \quad \text{con} \quad u_0 = \sqrt[4]{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right)$$

con $E_n = (\frac{1}{2} + n)\hbar\omega$.

10.9 Momento angular

Para el operador de momentun angular L tenemos: $[L_z, L^2] = [L_z, H] = [L^2, H] = 0$. Sin embargo, cíclicamente obtenemos: $[L_x, L_y] = i\hbar L_z$. No se pueden conocer todos los componentes de L al mismo tiempo con la misma exactitud. Para L_z se tiene:

$$L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

Los operadores de escalera L_{\pm} son definidos por: $L_{\pm} = L_x \pm iL_y$. Ahora tenemos: $L^2 = L_+L_- + L_z^2 - \hbar L_z$. Entonces,

$$L_{\pm} = \hbar e^{\pm i\varphi} \left(\pm \frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot(\theta) \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

De $[L_+, L_z] = -\hbar L_+$ siguiendo: $L_z(L_+ Y_{lm}) = (m+1)\hbar(L_+ Y_{lm})$.

De $[L_-, L_z] = \hbar L_-$ siguiendo: $L_z(L_- Y_{lm}) = (m-1)\hbar(L_- Y_{lm})$.

De $[L^2, L_{\pm}] = 0$ siguiendo: $L^2(L_{\pm} Y_{lm}) = l(l+1)\hbar^2(L_{\pm} Y_{lm})$.

Porque L_x y L_y son hermitianos (ésto implica $L_{\pm}^{\dagger} = L_{\mp}$) y $|L_{\pm} Y_{lm}|^2 > 0$ continuando: $l(l+1) - m^2 - m \geq 0 \Rightarrow -l \leq m \leq l$. Entonces, se obtienen que l tiene que ser integral o medio integral. Valores integrales medio impares dan una solución ψ y son por ello descontados.

10.10 Spin

Los operadores de spin son definidos por su relación de conmutación: $[S_x, S_y] = i\hbar S_z$. Porque los operadores de spin no actúan en el espacio físico (x, y, z) La única de una función de onda no es un criterio aquí: tan bien valores integrales de mitad impar son permitidos para el spin. Porque $[L, S] = 0$ spin y operadores de momento angular no tienen un conjunto común de funciones propias. Los operadores de spin son dados por $\vec{S} = \frac{1}{2}\hbar\vec{\sigma}$, con

$$\vec{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Los estados propios de S_z son llamados *spinors*: $\chi = \alpha_+ \chi_+ + \alpha_- \chi_-$, donde $\chi_+ = (1, 0)$ representa el estado con el spin ¡¡hacia arriba!! ($S_z = \frac{1}{2}\hbar$) y $\chi_- = (0, 1)$ representa el estado con spin ¡¡hacia abajo!! ($S_z = -\frac{1}{2}\hbar$). Luego, la probabilidad de encontrar el spin ¡¡hacia arriba!! después de una medida es dada por $|\alpha_+|^2$ y la oportunidad de encontrar el spin ¡¡hacia abajo!! es dada por $|\alpha_-|^2$. Por su puesto manteniendo $|\alpha_+|^2 + |\alpha_-|^2 = 1$.

El electrón tendrá un momento dipolar magnético intrínseco \vec{M} debido a su spin, dado por $\vec{M} = -eg_s \vec{S}/2m$, con $g_s = 2(1 + \alpha/2\pi + \dots)$ la razón giromagnética. En la presencia de un campo magnético externo es descrita por la energía potencial $U = -\vec{M} \cdot \vec{B}$. La ecuación de Schrödinger, entonces, se convierte (porque $\partial\chi/\partial x_i \equiv 0$):

$$i\hbar \frac{\partial \chi(t)}{\partial t} = \frac{eg_s \hbar}{4m} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} \chi(t)$$

con $\vec{\sigma} = (\vec{\sigma}_x, \vec{\sigma}_y, \vec{\sigma}_z)$. Si $\vec{B} = B\vec{e}_z$ existen dos valores propios para este problema: χ_{\pm} para $E = \pm eg_s \hbar B/4m = \pm \hbar\omega$. Así en general la solución es dada por $\chi = (ae^{-i\omega t}, be^{i\omega t})$. De ello podemos derivar: $\langle S_x \rangle = \frac{1}{2}\hbar \cos(2\omega t)$ y $\langle S_y \rangle = \frac{1}{2}\hbar \sin(2\omega t)$. Entonces el spin precesa alrededor del eje z con una frecuencia 2ω . Ésto causa la separación Zeeman normal delinea espectrales.

El operador de potencial para dos partículas con spin $\pm \frac{1}{2}\hbar$ es descrito por:

$$V(r) = V_1(r) + \frac{1}{\hbar^2} (\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2) V_2(r) = V_1(r) + \frac{1}{2} V_2(r) [S(S+1) - \frac{3}{2}]$$

Ésto hace imposible que dos estados pueden existir a la vez: $S = 1$ (triplete) o $S = 0$ (singlete).

10.11 El formalismo de Dirac

Si los operadores para p y E son sustituidos en la ecuación relativística $E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2$, la ecuación de Klein-Gordon se presenta:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi(\vec{x}, t) = 0$$

El operador $\square - m_0^2 c^2 / \hbar^2$ puede ser separado:

$$\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} = \left\{ \gamma_\lambda \frac{\partial}{\partial x_\lambda} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right\} \left\{ \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right\}$$

donde las matrices de Dirac γ son dadas por: $\gamma_\lambda \gamma_\mu + \gamma_\mu \gamma_\lambda = 2\delta_{\lambda\mu}$. De ésto encontramos que podemos derivar que la γ es hermitiano 4×4 , las matrices son dadas por:

$$\gamma_k = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_k \\ i\sigma_k & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

Con esto, la ecuación de Dirac se convierte:

$$\left(\gamma_\lambda \frac{\partial}{\partial x_\lambda} + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi(\vec{x}, t) = 0$$

donde $\psi(x) = (\psi_1(x), \psi_2(x), \psi_3(x), \psi_4(x))$ es un spinor.

10.12 física atómica

10.12.1 Soluciones

Las soluciones de la ecuación de Schrödinger en coordenadas esféricas, si el potencial de energía es una función exclusivamente de r puede ser escrita como: $\psi(r, \theta, \varphi) = R_{nl}(r) Y_{l, m_l}(\theta, \varphi) \chi_{m_s}$, con

$$Y_{lm} = \frac{C_{lm}}{\sqrt{2\pi}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$$

Para un átomo o un ion con un electrón se tiene: $R_{lm}(\rho) = C_{lm} e^{-\rho/2} \rho^l L_{n-l-1}^{2l+1}(\rho)$

con $\rho = 2rZ/na_0$, y con $a_0 = \varepsilon_0 \hbar^2 / \pi m_e e^2$. El L_i^j es asociado con las funciones de Laguerre y el P_l^m es asociado con los polinomios de Legendre:

$$P_l^{|m|}(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{|m|}}{dx^{|m|}} [(x^2-1)^l] \quad , \quad L_n^m(x) = \frac{(-1)^m n!}{(n-m)!} e^{-x} x^{-m} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} (e^{-x} x^n)$$

La paridad de estas soluciones es $(-1)^l$. Las funciones son $2 \sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = 2n^2$ -degeneradas.

10.12.2 Ecuaciones de valores propios

Las ecuaciones de valores propios para un átomo o ion con un electrón son:

Ecuación	Valor propio	Intervalo
$H_{\text{op}} \psi = E \psi$	$E_n = \mu e^4 Z^2 / 8 \varepsilon_0^2 \hbar^2 n^2$	$n \geq 1$
$L_{z\text{op}} Y_{lm} = L_z Y_{lm}$	$L_z = m_l \hbar$	$-l \leq m_l \leq l$
$L_{\text{op}}^2 Y_{lm} = L^2 Y_{lm}$	$L^2 = l(l+1) \hbar^2$	$l < n$
$S_{z\text{op}} \chi = S_z \chi$	$S_z = m_s \hbar$	$m_s = \pm \frac{1}{2}$
$S_{\text{op}}^2 \chi = S^2 \chi$	$S^2 = s(s+1) \hbar^2$	$s = \frac{1}{2}$

10.12.3 interacion de orbita-spin

El momento total es descrito por $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$. el momento total de un c magnetico de un electron es entonces $\vec{M} = \vec{M}_L + \vec{M}_S = -(e/2m_e)(\vec{L} + g_S\vec{S})$ donde $g_S = 2.0023$ es la razon giromagnetica del electron. Obteniendo: $J^2 = L^2 + S^2 + 2\vec{L} \cdot \vec{S} = L^2 + S^2 + 2L_zS_z + L_+S_- + L_-S_+$. J como los numeros cuanticos j con valores posibles $j = l \pm \frac{1}{2}$, con $2j+1$ posibles componentes z ($m_J \in \{-j, \dots, 0, \dots, j\}$). Si la energia de interraccion entre S y L es pequenna puede ser declararse que: $E = E_n + E_{SL} = E_n + a\vec{S} \cdot \vec{L}$. puede ser derivado entonces que:

$$a = \frac{|E_n|Z^2\alpha^2}{\hbar^2 n l(l+1)(l + \frac{1}{2})}$$

Después de la corrección relativística esto se convierte:

$$E = E_n + \frac{|E_n|Z^2\alpha^2}{n} \left(\frac{3}{4n} - \frac{1}{j + \frac{1}{2}} \right)$$

La *fineza de estructura* en espectros atómicos aparece de esto. Con $g_S = 2$ continuando para el promedio del momento magnético: $\vec{M}_{av} = -(e/2m_e)g\hbar\vec{J}$, donde g es el factor de Landé:

$$g = 1 + \frac{\vec{S} \cdot \vec{J}}{J^2} = 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)}$$

Para átomos con más de un electrón ocurre la siguiente limitación:

1. Acoplamiento $L - S$: para átomos pequeños la interacción electrostática es dominante y el estado puede ser caracterizado por L, S, J, m_J . $J \in \{|L - S|, \dots, L + S - 1, L + S\}$ y $m_J \in \{-J, \dots, J - 1, J\}$. La notación espectroscópica para esta interacción es: $^{2S+1}L_J$. $2S + 1$ es la multiplicidad de los estados degenerados.
2. Acoplamiento $j - j$: Para átomos grandes la interacción electrostática más pequeña que $L_i \cdot s_i$ la interacción de un electrón. El estado es caracterizado por $j_1 \dots j_n, J, m_J$ donde solamente la j_i de sub-capas, que no es llenada completamente, es tomada en cuenta.

La diferencia de energía para átomos grandes cuando son colocados en un campo magnético es: $\Delta E = g\mu_B m_J B$ donde g es el factor de Landé. Para una transición entre dos estados singletes la línea se divide en tres partes, para $\Delta m_J = -1, 0 + 1$. Esto resulta en un efecto Zeeman normal. A altas S La línea se divide en más partes: El efecto Zeeman anómalo.

Interacción con el spin del núcleo da la estructura hiperfina.

10.12.4 Reglas de selección

Para la transición dipolar la matriz de elementos presenta: $p_0 \sim |\langle l_2 m_2 | \vec{E} \cdot \vec{r} | l_1 m_1 \rangle|$. La conservación de momento angular demanda que para la transición de un electrón se tiene $\Delta l = \pm 1$.

Para un átomo donde acoplamiento $L - S$ es dominante por lo que se tiene: $\Delta S = 0$ (pero no estrictamente), $\Delta L = 0, \pm 1$, $\Delta J = 0, \pm 1$ excepto para transiciones $J = 0 \rightarrow J = 0$, $\Delta m_J = 0, \pm 1$, pero $\Delta m_J = 0$ es prohibido si $\Delta J = 0$.

Para un átomo donde $j - j$ donde el acoplamiento es dominante, de este modo tenemos: para el salto de electrones, excepto $\Delta l = \pm 1$, también: $\Delta j = 0, \pm 1$, y para todos los otros electrones: $\Delta j = 0$. Para el átomo en conjunto se tiene: $\Delta J = 0, \pm 1$ pero no $J = 0 \rightarrow J = 0$ transiciones y $\Delta m_J = 0, \pm 1$, pero $\Delta m_J = 0$ es prohibida si $\Delta J = 0$.

10.13 Interracción con campos electromagnéticos

El hamiltoniano de un electrón en un campo electromagnético es descrito por:

$$H = \frac{1}{2\mu}(\vec{p} + e\vec{A})^2 - eV = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + \frac{e}{2\mu}\vec{B} \cdot \vec{L} + \frac{e^2}{2\mu}A^2 - eV$$

donde μ es la masa reducida del sistema. El término $\sim A^2$ puede usualmente ser despreciado, excepto para campos realmente fuertes o movimientos macroscópicos. Para $\vec{B} = B\vec{e}_z$ es descrito por $e^2 B^2 (x^2 + y^2) / 8\mu$.

Cuando la transformación de norma $\vec{A}' = \vec{A} - \nabla f$, $V' = V + \partial f / \partial t$ es aplicada a los potenciales de las funciones de onda es también transformado de acuerdo a $\psi' = \psi e^{iqef/\hbar}$ con qe la carga de la partícula. Porque $f = f(x, t)$, esto es llamado una transformación de norma *local*, en contraste con una transformación de norma *global* que puede ser siempre aplicado.

10.14 Teoría de perturbaciones

10.14.1 Teoría de perturbaciones dependiente del tiempo

Para resolver la ecuación $(H_0 + \lambda H_1)\psi_n = E_n\psi_n$ se debe encontrar una función propia de $H = H_0 + \lambda H_1$. Supongamos que ϕ_n es un conjunto completo de funciones propias de un hamiltoniano no perturbado H_0 : $H_0\phi_n = E_n^0\phi_n$. Porque ϕ_n es un conjunto completo:

$$\psi_n = N(\lambda) \left\{ \phi_n + \sum_{k \neq n} c_{nk}(\lambda) \phi_k \right\}$$

Cuando c_{nk} y E_n son expandidos en λ : $c_{nk} = \lambda c_{nk}^{(1)} + \lambda^2 c_{nk}^{(2)} + \dots$
 $E_n = E_n^0 + \lambda E_n^{(1)} + \lambda^2 E_n^{(2)} + \dots$

y estos es colocado en la ecuación de Schrödinger el resultado es: $E_n^{(1)} = \langle \phi_n | H_1 | \phi_n \rangle$ y $c_{nm}^{(1)} = \frac{\langle \phi_m | H_1 | \phi_n \rangle}{E_n^0 - E_m^0}$ si $m \neq n$. El segundo orden de corrección de la energía es dado por:
 $E_n^{(2)} = \sum_{k \neq n} \frac{|\langle \phi_k | H_1 | \phi_n \rangle|^2}{E_n^0 - E_k^0}$. Así el primer orden da: $\psi_n = \phi_n + \sum_{k \neq n} \frac{\langle \phi_k | \lambda H_1 | \phi_n \rangle}{E_n^0 - E_k^0} \phi_k$.

En caso que los niveles sean degenerados la última ecuación no es valida. En tal caso un conjunto de funciones ortonormales ϕ_{ni} es escogido para cada nivel n , de modo que $\langle \phi_{mi} | \phi_{nj} \rangle = \delta_{mn} \delta_{ij}$. Ahora ψ es expandido como:

$$\psi_n = N(\lambda) \left\{ \sum_i \alpha_i \phi_{ni} + \lambda \sum_{k \neq n} c_{nk}^{(1)} \sum_i \beta_i \phi_{ki} + \dots \right\}$$

$E_{ni} = E_{ni}^0 + \lambda E_{ni}^{(1)}$ es aproximado por $E_{ni}^0 := E_n^0$. Sustituyendo en la ecuación de Schrödinger y tomando el producto punto con ϕ_{ni} dando: $\sum_i \alpha_i \langle \phi_{nj} | H_1 | \phi_{ni} \rangle = E_n^{(1)} \alpha_j$. Normalización requiere que $\sum_i |\alpha_i|^2 = 1$.

10.14.2 Teoría de perturbaciones dependiente del tiempo

De la ecuación de Schrödinger $i\hbar \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = (H_0 + \lambda V(t))\psi(t)$

y la expansión $\psi(t) = \sum_n c_n(t) \exp\left(\frac{-iE_n^0 t}{\hbar}\right) \phi_n$ con $c_n(t) = \delta_{nk} + \lambda c_n^{(1)}(t) + \dots$

continuado: $c_n^{(1)}(t) = \frac{\lambda}{i\hbar} \int_0^t \langle \phi_n | V(t') | \phi_k \rangle \exp\left(\frac{i(E_n^0 - E_k^0)t'}{\hbar}\right) dt'$

10.15 Sistemas de N-partículas

10.15.1 General

Partículas idénticas son indistinguibles. Para la función de onda total de un sistema de partículas idénticas indistinguibles se tiene:

1. Partículas con spin integrado tipo mitad impar (Fermiones): ψ_{total} debe ser simétrico intercambiable en sus coordenadas (espaciales y de spin) de cada par de partículas. El principio de Pauli resulta de esto: dos fermiones no pueden existir en un estado idéntico porque entonces $\psi_{\text{total}} = 0$.
2. Partículas con spin integrado (Bosones): ψ_{total} debe ser simétrico w.r.t. intercambiable en las coordenadas (espacial y de spin) de cada par de partículas.

Para un sistema de dos electrones existen dos posibilidades para la función de onda espacial. Cuando a y b son los números cuánticos del electrón uno y dos obteniendo:

$$\psi_S(1, 2) = \psi_a(1)\psi_b(2) + \psi_a(2)\psi_b(1) \quad , \quad \psi_A(1, 2) = \psi_a(1)\psi_b(2) - \psi_a(2)\psi_b(1)$$

Porque las partículas no se aproximan una a la otra la energía de repulsión en ψ_A en el estado es más pequeño. La siguiente función de onda del spin son posibles:

$$\begin{aligned} \chi_A &= \frac{1}{2}\sqrt{2}[\chi_+(1)\chi_-(2) - \chi_+(2)\chi_-(1)] & m_s &= 0 \\ \chi_S &= \begin{cases} \chi_+(1)\chi_+(2) & m_s = +1 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}[\chi_+(1)\chi_-(2) + \chi_+(2)\chi_-(1)] & m_s = 0 \\ \chi_-(1)\chi_-(2) & m_s = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Porque la función de onda total debe ser anti-simétrica se obtiene: $\psi_{\text{total}} = \psi_S\chi_A$ o $\psi_{\text{total}} = \psi_A\chi_S$.

Para N partículas la función espacial simétrica es dada por:

$$\psi_S(1, \dots, N) = \sum \psi(\text{all permutaciones de } 1..N)$$

La función de onda anti-simétrica es dada por el determinante $\psi_A(1, \dots, N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} |u_{E_i}(j)|$

10.15.2 Moléculas

La función de onda de una átomo a y b son ϕ_a y ϕ_b . Si los dos átomos se aproximan uno al otro existen dos posibilidades: la función de onda total se aproxima a la función de enlace con energía total menor $\psi_B = \frac{1}{2}\sqrt{2}(\phi_a + \phi_b)$ o se aproxima a una función de repulsión con energía máxima $\psi_{AB} = \frac{1}{2}\sqrt{2}(\phi_a - \phi_b)$. Si una molécula-orbital es simétrica w.r.t. el eje de conexión, como una combinación de dos orbitales s que son llamados orbitales σ , de otro modo son llamados orbitales π , como la combinación de dos orbitales p a lo largo de dos ejes.

La energía de un sistema es: $E = \frac{\langle \psi | H | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}$.

La energía calculada con este método siempre es *Mayor* que la energía real si ψ es únicamente una aproximación para la solución de $H\psi = E\psi$. También, si existen más funciones a escoger, la función que da la más baja energía es la mejor aproximación. Aplicando esto a la función $\psi = \sum c_i \phi_i$ encontramos: $(H_{ij} - ES_{ij})c_i = 0$. Esta ecuación tiene una solución única si el *determinante secular* $|H_{ij} - ES_{ij}| = 0$. Aquí, $H_{ij} = \langle \phi_i | H | \phi_j \rangle$ y $S_{ij} = \langle \phi_i | \phi_j \rangle$. $\alpha_i := H_{ii}$ es la integral de Coulomb y $\beta_{ij} := H_{ij}$ la integral de intercambio. $S_{ii} = 1$ y S_{ij} es la integral de traslape.

La primera aproximación en la teoría molecular-orbital es la colocación de ambos electrones de un enlace químico en un enlace orbital: $\psi(1, 2) = \psi_B(1)\psi_B(2)$. Esto resulta en una gran densidad de electrones entre los nucleones y entonces una repulsión. Una mejor aproximación es: $\psi(1, 2) = C_1\psi_B(1)\psi_B(2) + C_2\psi_{AB}(1)\psi_{AB}(2)$, con $C_1 = 1$ y $C_2 \approx 0.6$.

En algunos átomos, tales como C, son energéticamente más adecuados para formar orbitales que son combinaciones lineales de estados s , p y d . Existen tres modos de hibridización en C:

1. híbridos SP: $\psi_{sp} = \frac{1}{2}\sqrt{2}(\psi_{2s} \pm \psi_{2p_z})$. Existen dos orbitales híbridos que son colocados en una línea a 180° . Para los orbitales $2p_x$ y $2p_y$ permanecen.
2. híbridos SP^2 : $\psi_{sp^2} = \psi_{2s}/\sqrt{3} + c_1\psi_{2p_z} + c_2\psi_{2p_y}$, donde $(c_1, c_2) \in \{(\sqrt{2/3}, 0), (-1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{2}), (-1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{2})\}$. Los tres orbitales SP^2 están en un plano, con ejes de simetría que están al ángulo de 120° .
3. híbridos SP^3 : $\psi_{sp^3} = \frac{1}{2}(\psi_{2s} \pm \psi_{2p_z} \pm \psi_{2p_y} \pm \psi_{2p_x})$. Los cuatro orbitales SP^3 de un tetraedro con ejes de simetría a un ángulo de $109^\circ 28'$.

10.16 Quantum statistics

If a system exists in a state in which one has not the disposal of the maximal amount of information about the system, it can be described by a *density matrix* ρ . If the probability that the system is in state ψ_i is given by a_i , one can write for the expectation value a of A : $\langle a \rangle = \sum_i r_i \langle \psi_i | A | \psi_i \rangle$.

If ψ is expanded into an orthonormal basis $\{\phi_k\}$ as: $\psi^{(i)} = \sum_k c_k^{(i)} \phi_k$, holds:

$$\langle A \rangle = \sum_k (A\rho)_{kk} = \text{Tr}(A\rho)$$

where $\rho_{lk} = c_k^* c_l$. ρ is hermitian, with $\text{Tr}(\rho) = 1$. Further holds $\rho = \sum_i r_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$. The probability to find eigenvalue a_n when measuring A is given by ρ_{nn} if one uses a basis of eigenvectors of A for $\{\phi_k\}$. For the time-dependence holds (in the Schrödinger image operators are not explicitly time-dependent):

$$i\hbar \frac{d\rho}{dt} = [H, \rho]$$

For a macroscopic system in equilibrium holds $[H, \rho] = 0$. If all quantumstates with the same energy are equally probable: $P_i = P(E_i)$, one can obtain the distribution:

$$P_n(E) = \rho_{nn} = \frac{e^{-E_n/kT}}{Z} \quad \text{with the state sum } Z = \sum_n e^{-E_n/kT}$$

The thermodynamic quantities are related to these definitions as follows: $F = -kT \ln(Z)$, $U = \langle H \rangle = \sum_n p_n E_n = -\frac{\partial}{\partial kT} \ln(Z)$, $S = -k \sum_n P_n \ln(P_n)$. For a mixed state of M orthonormal quantum states with probability $1/M$ follows: $S = k \ln(M)$.

The distribution function for the internal states for a system in thermal equilibrium is the most probable function. This function can be found by taking the maximum of the function which gives the number of states with Stirling's equation: $\ln(n!) \approx n \ln(n) - n$, and the conditions $\sum_k n_k = N$ and $\sum_k n_k W_k = W$. For identical, indistinguishable particles which obey the Pauli exclusion principle the possible number of states is given by:

$$P = \prod_k \frac{g_k!}{n_k!(g_k - n_k)!}$$

This results in the *Fermi-Dirac statistics*. For indistinguishable particles which *do not* obey the exclusion principle the possible number of states is given by:

$$P = N! \prod_k \frac{g_k^{n_k}}{n_k!}$$

This results in the *Bose-Einstein statistics*. So the distribution functions which explain how particles are distributed over the different one-particle states k which are each g_k -fold degenerate depend on the spin of the particles. They are given by:

1. Estadística de Fermi-Dirac: spin entero. $n_k \in \{0, 1\}$, $n_k = \frac{N}{Z_g} \frac{g_k}{\exp((E_k - \mu)/kT) + 1}$
with $\ln(Z_g) = \sum g_k \ln[1 + \exp((E_i - \mu)/kT)]$.
2. Estadística de Bose-Einstein: spin $(2n+1)/2$. $n_k \in \mathbb{N}$, $n_k = \frac{N}{Z_g} \frac{g_k}{\exp((E_k - \mu)/kT) - 1}$
with $\ln(Z_g) = -\sum g_k \ln[1 - \exp((E_i - \mu)/kT)]$.

Aquí, Z_g is the large-canonical state sum and μ the chemical potential. It is found by demanding $\sum n_k = N$, and for it holds: $\lim_{T \rightarrow 0} \mu = E_F$, the Fermi-energy. N is the total number of particles. The Maxwell-Boltzmann distribution can be derived from this in the limit $E_k - \mu \gg kT$:

$$n_k = \frac{N}{Z} \exp\left(-\frac{E_k}{kT}\right) \quad \text{with} \quad Z = \sum_k g_k \exp\left(-\frac{E_k}{kT}\right)$$

With the Fermi-energy, the Fermi-Dirac and Bose-Einstein statistics can be written as:

1. Fermi-Dirac statistics: $n_k = \frac{g_k}{\exp((E_k - E_F)/kT) + 1}$.
 2. Bose-Einstein statistics: $n_k = \frac{g_k}{\exp((E_k - E_F)/kT) - 1}$.
-

Chapter 11

Física de Plasmas

11.1 Introducción

El *grado de ionización* α de un plasma es definido por: $\alpha = \frac{n_e}{n_e + n_0}$

donde n_e es la densidad electrónica y n_0 es la densidad de las partículas neutras. Si un plasma contiene únicamente carga negativa en los iones, el término α no está bien definido.

La probabilidad de un partícula a colacionar con otra es dado por: $dP = n\sigma dx$, donde σ es la *sección efectiva*. La frecuencia de colisión $\nu_c = 1/\tau_c = n\sigma v$. El *camino libre medio* es determinado por $\lambda_v = 1/n\sigma$. El *rate coefficient* K es definido por $K = \langle \sigma v \rangle$. El número de colisiones por unidad de tiempo y volumen entre dos partículas de clase uno y clase dos determinado por $n_1 n_2 \langle \sigma v \rangle = K n_1 n_2$.

El potencial de un electrón es descrito por:

$$V(r) = \frac{-e}{4\pi\epsilon_0 r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right) \quad \text{with} \quad \lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k T_e T_i}{e^2 (n_e T_i + n_i T_e)}} \approx \sqrt{\frac{\epsilon_0 k T_e}{n_e e^2}}$$

porque la carga es envuelta en el plasma. Aquí, λ_D es la *longitud de Debye*. Para distancias $< \lambda_D$ el plasma no puede ser asumido como quasi-neutral. Desviaciones del cambio de la neutralidad por movimiento térmico es compensando por oscilaciones con la frecuencia

$$\omega_{pe} = \sqrt{\frac{n_e e^2}{m_e \epsilon_0}}$$

La distancia de la aproximación más cercana cuando dos partículas con cargas iguales colacionan en una desviación de $\pi/2$ es $2b_0 = e^2/(4\pi\epsilon_0 \frac{1}{2} m v^2)$. Un plasma “puro” es definido como el plasma que presenta: $b_0 < n_e^{-1/3} \ll \lambda_D \ll L_p$. Aquí $L_p := |n_e/\nabla n_e|$ es la longitud del gradiente de el plasma.

11.2 Transporte

Tiempos de relajación son definidos como $\tau = 1/\nu_c$. Comenzando con $\sigma_m = 4\pi b_0^2 \ln(\Lambda_C)$ y con $\frac{1}{2} m v^2 = kT$ puede encontrarse que:

$$\tau_m = \frac{4\pi\epsilon_0^2 m^2 v^3}{n e^4 \ln(\Lambda_C)} = \frac{8\sqrt{2}\pi\epsilon_0^2 \sqrt{m} (kT)^{3/2}}{n e^4 \ln(\Lambda_C)}$$

Para la transferencia de momentum entre electrones e iones se tiene para una distribución de velocidades maxwelliana:

$$\tau_{ee} = \frac{6\pi\sqrt{3}\epsilon_0^2 \sqrt{m_e} (kT_e)^{3/2}}{n_e e^4 \ln(\Lambda_C)} \approx \tau_{ei} \quad , \quad \tau_{ii} = \frac{6\pi\sqrt{3}\epsilon_0^2 \sqrt{m_i} (kT_i)^{3/2}}{n_i e^4 \ln(\Lambda_C)}$$

La energía en el tiempo de relajación para partículas idénticas es igual al tiempo de la relajacion del moemntum. Porque para colisiones e-i la transferencia de energía es únicamente $\sim 2m_e/m_i$ este es proceso lento. Aproximadamente se tiene: $\tau_{ee} : \tau_{ei} : \tau_{ie} : \tau_{ii}^E = 1 : 1 : \sqrt{m_i/m_e} : m_i/m_e$.

La relajación para interacciones e-o es mucho mas complicada. Para $T > 10$ eV se tiene aproximadamente: $\sigma_{eo} = 10^{-17} v_e^{-2/5}$, para menores energías esto puede ser diez veces menor.

La resistividad $\eta = E/J$ de un plasma es dada por:

$$\eta = \frac{n_e e^2}{m_e \nu_{ei}} = \frac{e^2 \sqrt{m_e} \ln(\Lambda_C)}{6\pi \sqrt{3} \varepsilon_0^2 (kT_e)^{3/2}}$$

Los coeficiente de difusión D es definida por medio del flujo Γ por $\vec{\Gamma} = n\vec{v}_{\text{diff}} = -D\nabla n$. La ecuación de continuidad es $\partial_t n + \nabla(nv_{\text{diff}}) = 0 \Rightarrow \partial_t n = D\nabla^2 n$. Encontramos que $D = \frac{1}{3}\lambda_v v$. Una primitiva estimación resulta $\tau_D = L_p/D = L_p^2 \tau_c / \lambda_v^2$. Para Plasmas magnetizados λ_v debe ser reemplazado por el radio de ciclotrón. En campos eléctricos también se tiene $\vec{J} = ne\mu\vec{E} = e(n_e\mu_e + n_i\mu_i)\vec{E}$ con $\mu = e/mv_c$ la movilidad de las partículas. La razón de Einstein es:

$$\frac{D}{\mu} = \frac{kT}{e}$$

Porque un plasma es eléctricamente neutro, electrones e iones están fuertemente acoplados y no se difunden independientemente. El *coeficiente de difusión ambipolar* D_{amb} es definido por $\vec{\Gamma} = \vec{\Gamma}_i = \vec{\Gamma}_e = -D_{\text{amb}}\nabla n_{e,i}$. De esto se tiene que

$$D_{\text{amb}} = \frac{kT_e/e - kT_i/e}{1/\mu_e - 1/\mu_i} \approx \frac{kT_e\mu_i}{e}$$

En un campo magnético externo B_0 las partículas pueden moverse en órbitas espirales con el *radio de ciclotrón* $\rho = mv/eB_0$ y con frecuencia de ciclotrón $\Omega = B_0 e/m$. La órbita helicoidal es perturbada por colisiones. Un plasma es llamado *magnetizado* si $\lambda_v > \rho_{e,i}$. Así, los electrones son magnetizados si

$$\frac{\rho_e}{\lambda_{ee}} = \frac{\sqrt{m_e} e^3 n_e \ln(\Lambda_C)}{6\pi \sqrt{3} \varepsilon_0^2 (kT_e)^{3/2} B_0} < 1$$

Magnetización de solamente los electrones es suficiente para confinar razonablemente el plasma, porque ellos se encuentra acoplados a los iones por la neutralidad de la carga. En caso de un coeficiente magnético: $\nabla p = \vec{J} \times \vec{B}$. Combinando las dos ecuaciones de Maxwell estacionarias para el campo B estas forman las ecuaciones ideales de magneto-hidrodinámica. Para un campo B uniforme: $p = nkT = B^2/2\mu_0$.

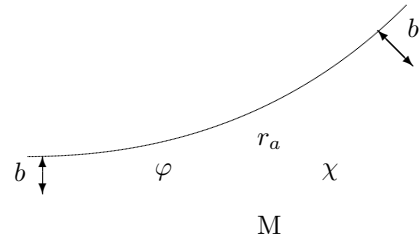
En ambos campos magnético y eléctrico están presentes electrones e iones que se mueven en la misma dirección. Si $\vec{E} = E_r\vec{e}_r + E_z\vec{e}_z$ y $\vec{B} = B_z\vec{e}_z$ el $\vec{E} \times \vec{B}$ deriva resulta en una velocidad $\vec{u} = (\vec{E} \times \vec{B})/B^2$ y la velocidad en el r, φ plano es $\dot{r}(r, \varphi, t) = \vec{u} + \dot{\vec{\rho}}(t)$.

11.3 Colisiones elásticas

11.3.1 General

El ángulo de esparcimiento de una partícula en la interacción con otras partículas, como muestra la figura a la derecha es:

$$\chi = \pi - 2b \int_{r_a}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{W(r)}{E_0}}}$$



Las partículas con un parámetro de impacto entre b and $b + db$, se mueven a través de un anillo imaginario con $d\sigma = 2\pi b db$ dejando el área de esparcimiento en un ángulo sólido $d\Omega = 2\pi \sin(\chi) d\chi$. La *sección efectiva diferencial* es entonces definida como:

$$I(\Omega) = \left| \frac{d\sigma}{d\Omega} \right| = \frac{b}{\sin(\chi)} \frac{\partial b}{\partial \chi}$$

Para una energía potencial $W(r) = kr^{-n}$ se obtiene: $I(\Omega, v) \sim v^{-4/n}$.

Para energías bajas, $\mathcal{O}(1 \text{ eV})$, σ presenta un *mínimo de Ramsauer*. Este aparece de la interferencia de la materia con las ondas detrás del objeto. $I(\Omega)$ para ángulos $0 < \chi < \lambda/4$ es mas grande que el valor clásico.

11.3.2 La interacción de Coulomb

Para la interacción de Coulomb se obtiene: $2b_0 = q_1 q_2 / 2\pi\epsilon_0 m v_0^2$, así $W(r) = 2b_0/r$. Se tiene $b = b_0 \cot(\frac{1}{2}\chi)$ y

$$I(\Omega) = \frac{b}{\sin(\chi)} \frac{\partial b}{\partial \chi} = \frac{b_0^2}{4 \sin^2(\frac{1}{2}\chi)}$$

Porque la influencia de la partícula desaparece en $r = \lambda_D$ obteniéndose: $\sigma = \pi(\lambda_D^2 - b_0^2)$. Porque $dp = d(mv) = mv_0(1 - \cos \chi)$ una sección efectiva relacionada con la transferencia de momento σ_m es dada por:

$$\sigma_m = \int (1 - \cos \chi) I(\Omega) d\Omega = 4\pi b_0^2 \ln \left(\frac{1}{\sin(\frac{1}{2}\chi_{\min})} \right) = 4\pi b_0^2 \ln \left(\frac{\lambda_D}{b_0} \right) := 4\pi b_0^2 \ln(\Lambda_C) \sim \frac{\ln(v^4)}{v^4}$$

donde $\ln(\Lambda_C)$ es el *logaritmo de Coulomb*. Para esta cantidad se tiene: $\Lambda_C = \lambda_D/b_0 = 9n(\lambda_D)$.

11.3.3 La interacción del dipolo inducido

La interacción del dipolo inducido, con $\vec{p} = \alpha \vec{E}$, muestra un potencial V y una energía W en un campo dipolar se describe así:

$$V(r) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad , \quad W(r) = -\frac{|e|p}{8\pi\epsilon_0 r^2} = -\frac{\alpha e^2}{2(4\pi\epsilon_0)^2 r^4}$$

$$\text{con } b_a = \sqrt[4]{\frac{2e^2\alpha}{(4\pi\epsilon_0)^2 \frac{1}{2} m v_0^2}} \text{ obteniéndose: } \chi = \pi - 2b \int_{r_a}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2} + \frac{b_a^4}{4r^4}}}$$

Si $b \geq b_a$ la carga puede alcanzar al átomo. Las fuerzas nucleares repulsivas previenen que suceda. Si el ángulo de dispersión es varias veces 2π se le denomina capturado. La sección eficaz para captura $\sigma_{\text{orb}} = \pi b_a^2$ es denominado el limite Langevin, y es la estimación menor para la sección eficaz.

11.3.4 El centro de masa del sistema

Si las colisiones de dos partículas con masas m_1 y m_2 con espacimientto en el centro de masa del sistema por un ángulo χ son comparadas con el espacimientto bajo el ángulo θ en el sistema del laboratorio es:

$$\tan(\theta) = \frac{m_2 \sin(\chi)}{m_1 + m_2 \cos(\chi)}$$

La pérdida de energía ΔE de una partícula incidente es:

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\frac{1}{2} m_2 v_2^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} = \frac{2m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} (1 - \cos(\chi))$$

11.3.5 Luz esparcida

El espacimientto de luz por electrones libres es llamado espacimientto de Thomson. El espacimientto es libre de los efectos colectivos si $k\lambda_D \ll 1$. La sección eficaz $\sigma = 6.65 \cdot 10^{-29} \text{ m}^2$ y

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{2v}{c} \sin(\frac{1}{2}\chi)$$

Esto da para una energía de esparcimiento $E_{\text{scat}} \sim n\lambda_0^4/(\lambda^2 - \lambda_0^2)^2$ con n la densidad. Si $\lambda \gg \lambda_0$ esto es denominado esparcimiento de Rayleigh. El esparcimiento de Thomson es un limite del esparcimiento de Compton, que es descrito por $\lambda' - \lambda = \lambda_C(1 - \cos \chi)$ with $\lambda_C = h/mc$ Bo se emplean efectos relativistas porque no son importantes.

11.4 Termodinámica en equilibrio y reversibilidad

La ley de radiación de Planck y la velocidad de distribucion de Maxwell aseguran el equilibrio de un plasma cuando:

$$\rho(\nu, T)d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1} d\nu \quad , \quad N(E, T)dE = \frac{2\pi n}{(\pi kT)^{3/2}} \sqrt{E} \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) dE$$

“Balance detallado” significa que el número de reacciones en una dirección es igual al número de reacciones en la dirección opuesta, porque ambos procesos tienen la misma probabilidad si se corrige para el espacio de fase. Para la reacción

$$\sum_{\text{adelante}} X_{\Theta \text{adelante}} \rightleftharpoons \sum_{\text{atras}} X_{\text{atras}}$$

El plasma en equilibrio presenta reversibilidad *microscópica*:

$$\prod_{\text{adelante}} \hat{\eta}_{\text{adelante}} = \prod_{\text{atras}} \hat{\eta}_{\text{atras}}$$

Considerando la distribución de velocidad maxwelliana:

$$\hat{\eta}_x = \frac{n_x}{g_x} \frac{h^3}{(2\pi m_x kT)^{3/2}} e^{-E_{\text{kin}}/kT}$$

donde g es el peso estadístico para el estado y $n/g := \eta$. Para electrones se tiene $g = 2$, Para estados excitados usualmente se tiene $g = 2j + 1 = 2n^2$.

Con ello encontramos que para el balance de Boltzmann, $X_p + e^- \rightleftharpoons X_1 + e^- + (E_{1p})$:

$$\frac{n_p^B}{n_1} = \frac{g_p}{g_1} \exp\left(\frac{E_p - E_1}{kT_e}\right)$$

y para el balance de Saha, $X_p + e^- + (E_{pi}) \rightleftharpoons X_1^+ + 2e^-$:

$$\frac{n_p^S}{g_p} = \frac{n_1^+}{g_1^+} \frac{n_e}{g_e} \frac{h^3}{(2\pi m_e kT_e)^{3/2}} \exp\left(\frac{E_{pi}}{kT_e}\right)$$

Porque el número de partículas del lado izquierdo y del lado derecho de la ecuación es diferente, permanece un factor de g/V_e . Este factor causa el llamado *salto de Saha*.

Para reversibilidad microscópica podemos derivar que para la razón de coeficientes $K(p, q, T) := \langle \sigma v \rangle_{pq}$ se obtiene:

$$K(q, p, T) = \frac{g_p}{g_q} K(p, q, T) \exp\left(\frac{\Delta E_{pq}}{kT}\right)$$

11.5 Colisiones inelásticas

11.5.1 Tipos de colisiones

La energía cinética puede ser separada en una parte *of* y otra parte *in* del centro de masa del sistema. La energía *in* el centro de masa del sistema es permite que se presenten reacciones. Esta energía es descrita por:

$$E = \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}$$

Algunos tipos importantes de colisiones inelásticas en física de plasmas son:

1. Excitación: $A_p + e^- \rightleftharpoons A_q + e^-$
2. Decaimiento: $A_q \rightleftharpoons A_p + hf$
3. Ionización y recombinación de tres partículas: $A_p + e^- \rightleftharpoons A^+ + 2e^-$
4. Recombinación radiactiva: $A^+ + e^- \rightleftharpoons A_p + hf$
5. Emisión estimulada : $A_q + hf \rightarrow A_p + 2hf$
6. Ionización asociativa: $A^{**} + B \rightleftharpoons AB^+ + e^-$
7. Ionización Penning: b.v. $Ne^* + Ar \rightleftharpoons Ar^+ + Ne + e^-$
8. Transferencia de carga: $A^+ + B \rightleftharpoons A + B^+$
9. transferencia resonante de carga: $A^+ + A \rightleftharpoons A + A^+$

11.5.2 Sección efectiva

La colisión entre un electrón y un átomo puede aproximarse por una colisión entre un electrón y uno de los electrones del átomo. Resultando en:

$$\frac{d\sigma}{d(\Delta E)} = \frac{\pi Z^2 e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 E (\Delta E)^2}$$

$$\text{Continuando para la transmisión } p \rightarrow q: \sigma_{pq}(E) = \frac{\pi Z^2 e^4 \Delta E_{q,q+1}}{(4\pi\epsilon_0)^2 E (\Delta E)_{pq}^2}$$

$$\text{Para la ionización del estado } p \text{ se obtiene una aproximación buena: } \sigma_p = 4\pi a_0^2 Ry \left(\frac{1}{E_p} - \frac{1}{E} \right) \ln \left(\frac{1.25\beta E}{E_p} \right)$$

$$\text{Para la transferencia resonante de carga se obtiene: } \sigma_{ex} = \frac{A[1 - B \ln(E)]^2}{1 + CE^{3.3}}$$

11.6 Radiación

En equilibrio se obtiene para el proceso de radiación:

$$\underbrace{n_p A_{pq}}_{\text{emission}} + \underbrace{n_p B_{pq} \rho(\nu, T)}_{\text{stimulated emission}} = \underbrace{n_q B_{qp} \rho(\nu, T)}_{\text{absorption}}$$

Aquí, A_{pq} es elemento de matriz de la transmisión $p \rightarrow q$, y es descrito por:

$$A_{pq} = \frac{8\pi^2 e^2 \nu^3 |r_{pq}|^2}{3\hbar \epsilon_0 c^3} \quad \text{with } r_{pq} = \langle \psi_p | \vec{r} | \psi_q \rangle$$

Para el átomo de hidrogeno se tiene: $A_p = 1.58 \cdot 10^8 Z^4 p^{-4.5}$, con $A_p = 1/\tau_p = \sum_q A_{pq}$. La intensidad I de una línea es descrito por $I_{pq} = hf A_{pq} n_p / 4\pi$. Los coeficientes de Einstein B son dados por:

$$B_{pq} = \frac{c^3 A_{pq}}{8\pi h \nu^3} \quad \text{and} \quad \frac{B_{pq}}{B_{qp}} = \frac{g_q}{g_p}$$

Una línea espectral es ensanchada por varios mecanismos:

1. Porque los estados tienen un vida finita. El tiempo de vida natural de un estado p es dado por $\tau_p = 1/\sum_q A_{pq}$. Del principio de incertidumbre se tiene que: $\Delta(h\nu) \cdot \tau_p = \frac{1}{2}\hbar$, esto nos da

$$\Delta\nu = \frac{1}{4\pi\tau_p} = \frac{\sum_q A_{pq}}{4\pi}$$

El ancho natural de línea es usualmente \ll más que el ensanchamiento debido a los siguientes dos mecanismos:

2. El ensanchamiento Doppler es causado por el movimiento térmico de las partículas:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{2}{c} \sqrt{\frac{2 \ln(2) k T_i}{m_i}}$$

Este ensanchamiento resulta en una línea de perfil tipo gaussiano:

$k_\nu = k_0 \exp(-[2\sqrt{\ln 2}(\nu - \nu_0)/\Delta\nu_D]^2)$, con k el coeficiente de absorción o de emisión.

3. El ensanchamiento Stark es causado por el campo eléctrico de los electrones:

$$\Delta\lambda_{1/2} = \left[\frac{n_e}{C(n_e, T_e)} \right]^{2/3}$$

para la línea H- β : $C(n_e, T_e) \approx 3 \cdot 10^{14} \text{ \AA}^{-3/2} \text{ cm}^{-3}$.

El ensanchamiento natural y el ensanchamiento Stark resultan en un perfil de Lorentz en la línea espectral: $k_\nu = \frac{1}{2} k_0 \Delta\nu_L / [(\frac{1}{2} \Delta\nu_L)^2 + (\nu - \nu_0)^2]$. La forma total de la línea es la convolución del perfil de Gauss y de Lorentz y se le denomina un *perfil de Voigt*.

El número de transiciones $p \rightarrow q$ es dado por $n_p B_{pq} \rho$ y por $n_p n_{hf} \langle \sigma_a c \rangle = n_p (\rho d\nu / h\nu) \sigma_a c$ donde $d\nu$ es el ancho de línea. Por siguiente, para la sección efectiva del proceso de absorción: $\sigma_a = B_{pq} h\nu / c d\nu$.

La radiación de fondo en un plasma es originada por dos procesos:

1. radiación de enlaces libres, originaria de la precombinación radiativa. La emisión es descrita por:

$$\varepsilon_{fb} = \frac{C_1}{\lambda^2} \frac{z_i n_i n_e}{\sqrt{k T_e}} \left[1 - \exp\left(-\frac{hc}{\lambda k T_e}\right) \right] \xi_{fb}(\lambda, T_e)$$

con $C_1 = 1.63 \cdot 10^{-43} \text{ Wm}^4 \text{ K}^{1/2} \text{ sr}^{-1}$ y ξ el *factor Biberman*.

2. radiación libre-libre, originaria de la aceleración de partículas en campos EM de otras partículas:

$$\varepsilon_{ff} = \frac{C_1}{\lambda^2} \frac{z_i n_i n_e}{\sqrt{k T_e}} \exp\left(-\frac{hc}{\lambda k T_e}\right) \xi_{ff}(\lambda, T_e)$$

11.7 La ecuación de transporte de Boltzmann

Se asume que existe una función de distribución F para el plasma que:

$$F(\vec{r}, \vec{v}, t) = F_r(\vec{r}, t) \cdot F_v(\vec{v}, t) = F_1(x, t) F_2(y, t) F_3(z, t) F_4(v_x, t) F_5(v_y, t) F_6(v_z, t)$$

Entonces el BTE es: $\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \nabla_r \cdot (F \vec{v}) + \nabla_v \cdot (F \vec{a}) = \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)_{\text{coll-rad}}$

Asumiendo que v no depende de r y a_i no depende de v_i , Se obtiene $\nabla_r \cdot (F \vec{v}) = \vec{v} \cdot \nabla F$ y $\nabla_v \cdot (F \vec{a}) = \vec{a} \cdot \nabla_v F$. Esto es cierto en campos magnéticos, también. Porque $\partial a_i / \partial x_i = 0$. La velocidad es parada en una velocidad térmica \vec{v}_t y una velocidad de deriva \vec{w} . La densidad total es dada por $n = \int F d\vec{v}$ y $\int \vec{v} F d\vec{v} = n \vec{w}$.

La ecuación de balance puede ser obtenida por medio de método de un momento:

1. Balance de masa: $\int (\text{BTE}) d\vec{v} \Rightarrow \frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n \vec{w}) = \left(\frac{\partial n}{\partial t} \right)_{\text{cr}}$
2. Balance de momentum: $\int (\text{BTE}) m \vec{v} d\vec{v} \Rightarrow m n \frac{d\vec{w}}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{T}' + \nabla p = m n \langle \vec{a} \rangle + \vec{R}$
3. Balance de energía: $\int (\text{BTE}) m v^2 d\vec{v} \Rightarrow \frac{3}{2} \frac{dp}{dt} + \frac{5}{2} p \nabla \cdot \vec{w} + \nabla \cdot \vec{q} = Q$

Aquí, $\langle \vec{a} \rangle = e/m(\vec{E} + \vec{w} \times \vec{B})$ es el promedio de la aceleración, $\vec{q} = \frac{1}{2}nm \langle \vec{v}_t^2 \vec{v}_t \rangle$ el flujo de calor, $Q = \int \frac{mv_t^2}{r} \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)_{cr} d\vec{v}$ el término de la fuente para la producción de energía, \vec{R} es un término de fricción y $p = nkT$ la presión.

Una derivación termodinámica nos permite obtener la presión total: $p = nkT = \sum_i p_i - \frac{e^2(n_e + z_i n_i)}{24\pi\epsilon_0\lambda_D}$

Para la conductancia eléctrica en un plasma se emplea la conservación de momentum, if $w_e \gg w_i$:

$$\eta \vec{J} = \vec{E} - \frac{\vec{J} \times \vec{B} + \nabla p_e}{en_e}$$

En un plasma donde solamente se presentan colisiones elásticas e-a son importantes la función de distribución de energía es la *distribución de Druyvesteyn*:

$$N(E)dE = Cn_e \left(\frac{E}{E_0} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{3m_e}{m_0} \left(\frac{E}{E_0} \right)^2 \right] dE$$

with $E_0 = eE\lambda_v = eE/n\sigma$.

11.8 Modelos radiativos de colisión

Estos modelos son las ecuaciones de primer momento para estados excitados. Se asume válida la quasi-estacionaridad de los estados, donde $\forall_{p>1}[(\partial n_p/\partial t = 0) \wedge (\nabla \cdot (n_p \vec{w}_p) = 0)]$. Lo que resulta en:

$$\left(\frac{\partial n_{p>1}}{\partial t} \right)_{cr} = 0, \quad \frac{\partial n_1}{\partial t} + \nabla \cdot (n_1 \vec{w}_1) = \left(\frac{\partial n_1}{\partial t} \right)_{cr}, \quad \frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i \vec{w}_i) = \left(\frac{\partial n_i}{\partial t} \right)_{cr}$$

Con soluciones $n_p = r_p^0 n_p^S + r_p^1 n_p^B = b_p n_p^S$. Obteniéndose para todos los niveles de colisión que $\delta b_p := b_p - 1 = b_0 p_{eff}^{-x}$ with $p_{eff} = \sqrt{Ry/E_{pi}}$ y $5 \leq x \leq 6$. Para sistemas en ESP, donde solamente se presentan colisiones de excitación y des-excitación entre niveles p y $p \pm 1$ es tomado en cuenta $x = 6$. Incluso en plasmas lejos del equilibrio, los niveles excitados alcanzan eventualmente el ESP, De este modo una cierta densidad en el nivel puede calcularse.

Para encontrar las densidades de población de un nivel inferior en el caso estacionario podemos comenzar con un equilibrio microscópico:

Number of populating processes of level p = Number of depopulating processes of level p ,

When this is expanded it becomes:

$$\underbrace{n_e \sum_{q<p} n_q K_{qp}}_{\text{coll. excit.}} + \underbrace{n_e \sum_{q>p} n_q K_{qp}}_{\text{coll. deexcit.}} + \underbrace{\sum_{q>p} n_q A_{qp}}_{\text{rad. deex. to}} + \underbrace{n_e^2 n_i K_{+p}}_{\text{coll. recomb.}} + \underbrace{n_e n_i \alpha_{rad}}_{\text{rad. recomb}} =$$

$$\underbrace{n_e n_p \sum_{q<p} K_{pq}}_{\text{coll. deexcit.}} + \underbrace{n_e n_p \sum_{q>p} K_{pq}}_{\text{coll. excit.}} + \underbrace{n_p \sum_{q<p} A_{pq}}_{\text{rad. deex. from}} + \underbrace{n_e n_p K_{p+}}_{\text{coll. ion.}}$$

11.9 Ondas en plasmas

La interacción de ondas electromagnéticas en plasmas resulta en el esparcimiento y absorción de energía. Para ondas electromagnéticas con número de onda complejo $k = \omega(n + i\kappa)/c$ en una dimensión, encontramos: $E_x = E_0 e^{-\kappa\omega x/c} \cos[\omega(t - nx/c)]$. El índice de refracción n es dado por:

$$n = \frac{k}{\omega} = \frac{c}{v_f} = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

Para disturbios en la dirección z en un plasma frío, homogéneo, magnetizado: $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z + \vec{B} e^{i(kz - \omega t)}$ y $n = n_0 + \hat{n} e^{i(kz - \omega t)}$ (campos E externos son probados) siguiendo, con las definiciones $\alpha = \omega_p/\omega$ y $\beta = \Omega/\omega$ y $\omega_p^2 = \omega_{pi}^2 + \omega_{pe}^2$:

$$\vec{J} = \vec{\sigma} \vec{E}, \text{ with } \vec{\sigma} = i\varepsilon_0 \omega \sum_s \alpha_s^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{1 - \beta_s^2} & \frac{-i\beta_s}{1 - \beta_s^2} & 0 \\ \frac{i\beta_s}{1 - \beta_s^2} & \frac{1}{1 - \beta_s^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde la suma es tomada sobre las especies de partículas s . El tensor dielectrico $\vec{\mathcal{E}}$, con la propiedad:

$$\vec{k} \cdot (\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{E}) = 0$$

es dado por $\vec{\mathcal{E}} = \vec{I} - \vec{\sigma}/i\varepsilon_0 \omega$.

Con las definiciones $S = 1 - \sum_s \frac{\alpha_s^2}{1 - \beta_s^2}$, $D = \sum_s \frac{\alpha_s^2 \beta_s}{1 - \beta_s^2}$, $P = 1 - \sum_s \alpha_s^2$

siguiendo:

$$\vec{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} S & -iD & 0 \\ iD & S & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix}$$

Los valores propios de esta matriz hermitiana son $R = S + D$, $L = S - D$, $\lambda_3 = P$, con los vectores propios $\vec{e}_r = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1, i, 0)$, $\vec{e}_l = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1, -i, 0)$ y $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$. \vec{e}_r es conectada con un campo rotatorio derecho para que $iE_x/E_y = 1$ y \vec{e}_l es conectada con un campo rotatorio izquierdo para el que $iE_x/E_y = -1$. When k haciendo un ángulo θ con \vec{B} encontramos:

$$\tan^2(\theta) = \frac{P(n^2 - R)(n^2 - L)}{S(n^2 - RL/S)(n^2 - P)}$$

donde n es el índice de refracción. Para esto las siguientes soluciones puede ser obtenidas:

A. $\theta = 0$: transmisión en la dirección z .

1. $P = 0$: $E_x = E_y = 0$. Esto describe una onda con polarización lineal longitudinal.
2. $n^2 = L$: onda polarizada circularmente a la izquierda.
3. $n^2 = R$: onda polarizada circularmente a la derecha.

B. $\theta = \pi/2$: transmisión \perp el campo B .

1. $n^2 = P$: el modo ordinario: $E_x = E_y = 0$. This is a transversal linear polarized wave.
2. $n^2 = RL/S$: el modo extraordinario: $iE_x/E_y = -D/S$, una onda polarizada elípticamente.

Frecuencias de resonancia son frecuencias para las que $n^2 \rightarrow \infty$, así $v_f = 0$. Para estos se tiene: $\tan(\theta) = -P/S$. Para $R \rightarrow \infty$ esto da la frecuencia de resonancia de ciclotrón $\omega = \Omega_e$, para $L \rightarrow \infty$ la frecuencia de resonancia ciclotrón de iones $\omega = \Omega_i$ y para $S = 0$ obteniéndose para el modo extraordinario:

$$\alpha^2 \left(1 - \frac{m_i}{m_e} \frac{\Omega_i^2}{\omega^2} \right) = \left(1 - \frac{m_i^2}{m_e^2} \frac{\Omega_i^2}{\omega^2} \right) \left(1 - \frac{\Omega_i^2}{\omega^2} \right)$$

frecuencias de corte son frecuencias para las que $n^2 = 0$, así $v_f \rightarrow \infty$. Para estos se tiene: $P = 0$ o $R = 0$ o $L = 0$.

En el caso que $\beta^2 \gg 1$ encontramos a las ondas de Alfvén propagándose paralelas a las líneas de campo. Con la velocidad Alfvén

$$v_A = \frac{\Omega_e \Omega_i}{\omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2} c^2$$

continuando: $n = \sqrt{1 + c/v_A}$, y en el caso $v_A \ll c$: $\omega = kv_A$.

Chapter 12

Física del estado sólido

12.1 Estructura cristalina

Una capa es definida por tres vectores de traslación \vec{a}_i , de modo que la composición atómica sea idéntica en cada punto \vec{r} y $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{T}$, donde \vec{T} es un vector de traslación: $\vec{T} = u_1\vec{a}_1 + u_2\vec{a}_2 + u_3\vec{a}_3$ with $u_i \in \mathbb{N}$. Una capa puede ser construida de celdas primitivas. Como una celda primitiva puede ser un paralelepípedo, con volumen

$$V_{\text{cell}} = |\vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)|$$

Porque la capa tiene una propiedad física estructural que están conectadas con la capa que tiene el mismo periodo (despreciando efectos de frontera):

$$n_e(\vec{r} + \vec{T}) = n_e(\vec{r})$$

Esta periodicidad es adecuada para un uso del analisis de Fourier: $n(\vec{r})$ es expandido:

$$n(\vec{r}) = \sum_G n_G \exp(i\vec{G} \cdot \vec{r})$$

con

$$n_G = \frac{1}{V_{\text{cell}}} \iiint_{\text{cell}} n(\vec{r}) \exp(-i\vec{G} \cdot \vec{r}) dV$$

\vec{G} es el *vector reciproco de capa*. Si \vec{G} es escrito como $\vec{G} = v_1\vec{b}_1 + v_2\vec{b}_2 + v_3\vec{b}_3$ con $v_i \in \mathbb{N}$, se tiene para los vectores \vec{b}_i , ciclamente:

$$\vec{b}_i = 2\pi \frac{\vec{a}_{i+1} \times \vec{a}_{i+2}}{\vec{a}_i \cdot (\vec{a}_{i+1} \times \vec{a}_{i+2})}$$

El conjunto de vectores \vec{G} determinan la difracción de Röntgen: un máximo en la radiación reflejada ocurre si: $\Delta\vec{k} = \vec{G}$ con $\Delta\vec{k} = \vec{k} - \vec{k}'$. Así: $2\vec{k} \cdot \vec{G} = G^2$. De lo anterior se obtiene para planos de capas paralelas (refracción de Bragg) para el máximo se tiene: $2d\sin(\theta) = n\lambda$.

La zona de Brillouines definida como una celda de Wigner-Seitz en la capa reciproca.

12.2 Enlace cristalino

Podemos distinguir entre cuatro clases de enlaces:

1. Enlace de Van der Waals
2. Enlace iónico
3. Enlace covalente o homopolar
4. Enlace metálico

Para el enlace del NaCl la energía por molécula es calculada por medio de:

$$E = \text{energía cohesiva (NaCl)} - \text{energía de ionización (Na)} + \text{afinidad electrónica (Cl)}$$

La interacción en un enlace covalente depende de las orientaciones de spin de los electrones que constituyen el enlace. La energía potencial para dos spines paralelos es mayor que la energía potencial de dos spines anti-paralelos. En consecuencia, para la energía potencial para dos spines anti-paralelos tiene algunas veces un mínimo. En tal caso el enlace no es posible.

12.3 Vibraciones cristalinas

12.3.1 Una capa con un tipo de átomo

En este modelo las vibraciones cristalinas sólo son interacciones cercanas al vecindario son tomadas en cuenta. La fuerza en el átomo s con masa M puede entonces ser escrito como:

$$F_s = M \frac{d^2 u_s}{dt^2} = C(u_{s+1} - u_s) + C(u_{s-1} - u_s)$$

Asumiendo que todas las soluciones tienen la misma dependencia en el tiempo $\exp(-i\omega t)$ resultado en:

$$-M\omega^2 u_s = C(u_{s+1} + u_{s-1} - 2u_s)$$

Entonces se puede postular: $u_{s\pm 1} = u \exp(isKa) \exp(\pm iKa)$.

Lo que da: $u_s = \exp(iKsa)$. Sustituyendo en las dos últimas ecuaciones en la primera resulta en un sistema de ecuaciones lineales, que tiene una única solución si su determinante es 0. lo que da:

$$\omega^2 = \frac{4C}{M} \sin^2(\frac{1}{2}Ka)$$

nicamente vibraciones con una longitud de onda dentro de la primera Zona de Brillouin tiene un significado físico. Este requiere que $-\pi < Ka \leq \pi$.

La velocidad de grupo de estas vibraciones da:

$$v_g = \frac{d\omega}{dK} = \sqrt{\frac{Ca^2}{M}} \cos(\frac{1}{2}Ka) .$$

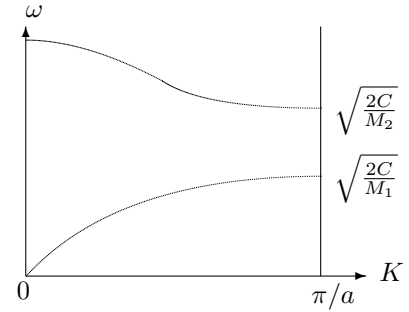
Y es 0 en la frontera de la Zona de Brillouin. Aquí, hay a onda estacionaria.

12.3.2 Una capa con dos tipos de átomos

Ahora la solución es:

$$\omega^2 = C \left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right) \pm C \sqrt{\left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right)^2 - \frac{4 \sin^2(Ka)}{M_1 M_2}}$$

Conectada con cada valor de K hay dos valores de ω , como puede observarse en la grafico. La línea superior describe la rama óptica, mientras que la línea inferior la rama acústica. En la rama óptica, ambos tipos de iones oscilan en fases opuestas, en la rama acústica ellos oscilan en la misma fase. Esto resulta en un momento dipolar inducido mucho mayor para oscilaciones ópticas, y también una mayor emisión y absorción de radiación. En conclusión cada rama presenta tres direcciones de polarización, una longitudinal y dos trasversales.



12.3.3 Fonones

La excitación mecánica cuántica de una vibración cristalina con una energía $\hbar\omega$ es denominada *fonon*. Fonones puede ser vista como cuasi-partículas: con colisiones, ellos se comportan como partículas con momentum $\hbar K$. Su momentum total es 0. Cuando ellos colisionan, Su momentum no necesita ser conservado: para un proceso normal se tiene: $K_1 + K_2 = K_3$, para un umklapp proceso se tiene: $K_1 + K_2 = K_3 + G$. Porque fonones no tienen spin ellos se comportan como bosones.

12.3.4 Capacidad térmica

La energía total las vibraciones del cristal pueden ser calculada multiplicada cada modo con su energía y sumando todas las ramas K y polarizaciones P :

$$U = \sum_K \sum_P \hbar\omega \langle n_{k,p} \rangle = \sum_\lambda \int D_\lambda(\omega) \frac{\hbar\omega}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1} d\omega$$

Para una polarización λ . La capacidad térmica es luego:

$$C_{\text{lattice}} = \frac{\partial U}{\partial T} = k \sum_\lambda \int D(\omega) \frac{(\hbar\omega/kT)^2 \exp(\hbar\omega/kT)}{(\exp(\hbar\omega/kT) - 1)^2} d\omega$$

La relación de dispersión en una dimensión es:

$$D(\omega)d\omega = \frac{L}{\pi} \frac{dK}{d\omega} d\omega = \frac{L}{\pi} \frac{d\omega}{v_g}$$

En tres dimensiones se aplica las condiciones de frontera periodica para un cubo con N^3 celdas primitivas y un volumen L^3 : $\exp(i(K_x x + K_y y + K_z z)) \equiv \exp(i(K_x(x+L) + K_y(y+L) + K_z(z+L)))$.

Porque $\exp(2\pi i) = 1$ hay solo una posibilidad si:

$$K_x, K_y, K_z = 0; \pm \frac{2\pi}{L}; \pm \frac{4\pi}{L}; \pm \frac{6\pi}{L}; \dots \pm \frac{2N\pi}{L}$$

Así hay solo un valor permitido para \vec{K} en el volumen $(2\pi/L)^3$ in K -space, o:

$$\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 = \frac{V}{8\pi^3}$$

permitiendo valores de \vec{K} por unidad de volumen en un espacio \vec{K} , para cada polarización y cada rama. El número total de estados con un vector de onda $< K$ es:

$$N = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \frac{4\pi K^3}{3}$$

Para cada polarización. La densidad de estados para cada polarización es, de acuerdo al modelo de Einstein:

$$D(\omega) = \frac{dN}{d\omega} = \left(\frac{V K^2}{2\pi^2}\right) \frac{dK}{d\omega} = \frac{V}{8\pi^3} \iint \frac{dA_\omega}{v_g}$$

El *modelo de Debye* para la capacidad calorífica térmica es una aproximación de baja temperatura que es válida arriba de $\approx 50\text{K}$. Aquí, únicamente los fonones acústicos se toman en cuenta (tres polarizaciones), y se asume que $v = \omega K$, independientemente de la polarización. Para esto se obtiene: $D(\omega) = V\omega^2/2\pi^2 v^3$, donde v es la velocidad. Esto da:

$$U = 3 \int D(\omega) \langle n \rangle \hbar\omega d\omega = \int_0^{\omega_D} \frac{V\omega^2}{2\pi^2 v^3} \frac{\hbar\omega}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1} d\omega = \frac{3Vk^2 T^4}{2\pi^2 v^3 \hbar^3} \int_0^{x_D} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}.$$

Here, $x_D = \hbar\omega_D/kT = \theta_D/T$. θ_D is the *Debye temperature* and is defined by:

$$\theta_D = \frac{\hbar v}{k} \left(\frac{6\pi^2 N}{V}\right)^{1/3}$$

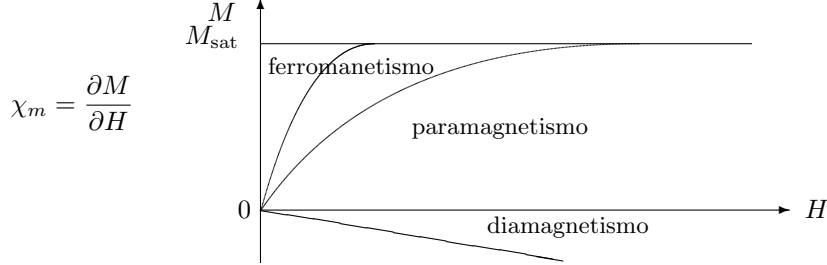
donde N es el número de celdas primitivas. Porque $x_D \rightarrow \infty$ para $T \rightarrow 0$ se tiene de eel:

$$U = 9NkT \left(\frac{T}{\theta_D}\right)^3 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{3\pi^4 NkT^4}{5\theta_D^3} \sim T^4 \quad \text{and} \quad C_V = \frac{12\pi^4 NkT^3}{5\theta_D^3} \sim T^3$$

En el modelo de Einstein para la capacidad térmica calorífica se considera únicamente fonones de una frecuencia, una aproximación para fonones ópticos.

12.4 Campo magnético en el estado sólido

La siguiente gráfica presenta la magnetización contra la intensidad de campo para diferentes tipos de magnetismo:



12.4.1 Dieléctricos

El origen mecánico cuántico del diamagnetismo es la presión de Larmor del spin del electrón. Comenzando con una órbita circular del electrón en el átomo con dos electrones, existe una fuerza de Coulomb F_c y una fuerza magnética en cada electrón. Si la parte magnética de la fuerza no es lo suficientemente fuerte para deformar significativamente las órbitas se tiene:

$$\omega^2 = \frac{F_c(r)}{mr} \pm \frac{eB}{m}\omega = \omega_0^2 \pm \frac{eB}{m}(\omega_0 + \delta) \Rightarrow \omega = \sqrt{\left(\omega_0 \pm \frac{eB}{2m}\right)^2 + \dots} \approx \omega_0 \pm \frac{eB}{2m} = \omega_0 \pm \omega_L$$

Aquí, ω_L es la *frecuencia de Larmor*. Un electrón es acelerado, mientras que el otro es desacelerado. Existe una corriente neta que resulta en un momento magnético $\vec{\mu}$. La corriente circular es dada por $I = -Ze\omega_L/2\pi$, y $\langle \mu \rangle = IA = I\pi \langle r^2 \rangle = \frac{2}{3}I\pi \langle r^2 \rangle$. Si N es el número de átomos en el cristal se obtiene para la susceptibilidad, con $\vec{M} = \vec{\mu}N$:

$$\chi = \frac{\mu_0 M}{B} = -\frac{\mu_0 N Ze^2}{6m} \langle r^2 \rangle$$

12.4.2 Paramagnetismo

Comenzando con la separación de los niveles de energía en un campo magnético: $\Delta U_m - \vec{\mu} \cdot \vec{B} = m_J g \mu_B B$, y con una distribución $f_m \sim \exp(-\Delta U_m/kT)$, encontramos para el momento magnético promedio $\langle \mu \rangle = \sum f_m \mu / \sum f_m$. Después de la linealización y porque $\sum m_J = 0$, $\sum J = 2J + 1$ and $\sum m_J^2 = \frac{2}{3}J(J+1)(J+\frac{1}{2})$ siguiendo esto:

$$\chi_p = \frac{\mu_0 M}{B} = \frac{\mu_0 N \langle \mu \rangle}{B} = \frac{\mu_0 J(J+1)g^2 \mu_B^2 N}{3kT}$$

Esto es la *ley de Curie law*, $\chi_p \sim 1/T$.

12.4.3 Ferromagnetismo

Un comportamiento ferromagnético como un paramagneto arriba de la temperatura crítica T_c . Para describir ferromagnetismo un campo B_E paralelo con M es postulado: $\vec{B}_E = \lambda \mu_0 \vec{M}$. De aquí el tratamiento es análogo al caso paramagnético:

$$\mu_0 M = \chi_p(B_a + B_E) = \chi_p(B_a + \lambda \mu_0 M) = \mu_0 \left(1 - \lambda \frac{C}{T}\right) M$$

Para esto se tiene para el ferromagneto: $\chi_F = \frac{\mu_0 M}{B_a} = \frac{C}{T - T_c}$ que es la *ley de Weiss-Curie*.

Si B_E es estimada de este modo resulta en valores de alrededor de 1000 T. Esto es claramente irreal y sigue un mecanismo diferente. Un enfoque mecánico cuántico de los postulados de Heisenberg

de la interacción entre dos átomos vecinos: $U = -2J\vec{S}_i \cdot \vec{S}_j \equiv -\vec{\mu} \cdot \vec{B}_E$. J es una integral superpuesta dando: $J = 3kT_c/2zS(S+1)$, con z el numero de vecindades. Una distinción entre dos casos puede ahora realizarse:

1. $J > 0$: S_i y S_j convirtiéndose en paralelo: el material es un ferromangetico.
2. $J < 0$: S_i and S_j convirtiéndose en anti-paralelo: el material es anti-ferromagnetico.

La teoría de Heisenberg predice ondas de spin cuantizadas: magnones. Comenzando de un modelo con sólo las vecindades más cercanas interactuando se puede escribir:

$$U = -2J\vec{S}_p \cdot (\vec{S}_{p-1} + \vec{S}_{p+1}) \approx \vec{\mu}_p \cdot \vec{B}_p \quad \text{with} \quad \vec{B}_p = \frac{-2J}{g\mu_B}(\vec{S}_{p-1} + \vec{S}_{p+1})$$

La ecuación de movimiento para los magnones se convierte: $\frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{2J}{\hbar}\vec{S}_p \times (\vec{S}_{p-1} + \vec{S}_{p+1})$

De aquí el tratamiento es análogo a los fonones: postulando ondas viajeras de el tipo $\vec{S}_p = \vec{u} \exp(i(pka - \omega t))$. Ésto resulta en un sistema de ecuaciones lineales con solución:

$$\hbar\omega = 4JS(1 - \cos(ka))$$

12.5 Electrón libre en un gas de Fermi

12.5.1 Thermal heat capacity

La solución con periodo L de la ecuación de dimensión Schrödinger es: $\psi_n(x) = A \sin(2\pi x/\lambda_n)$ con $n\lambda_n = 2L$. De lo que se tiene

$$E = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2$$

En una capa lineal el unicos numeros cuanticos importantes son n y m_s . El *nivel de Fermi* es el nivel lleno mas alejado del estado base, que tiene la *la energia de Fermi* E_F . Si n_F es numero cuantico del nivel de Fermi, puede ser expresado como: $2n_F = N$ asi, $E_F = \hbar^2\pi^2 N^2/8mL$. En tres dimensiones se tiene:

$$k_F = \left(\frac{3\pi^2 N}{V} \right)^{1/3} \quad \text{y} \quad E_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3\pi^2 N}{V} \right)^{2/3}$$

El numero de estados con energia $\leq E$ es entonces: $N = \frac{V}{3\pi^2} \left(\frac{2mE}{\hbar^2} \right)^{3/2}$.

y la densidad de estados se convierte: $D(E) = \frac{dN}{dE} = \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{E} = \frac{3N}{2E}$.

la capaciad calorifica de los electrones es aproximadamente 0.01 veces el valor clasico esperado $\frac{3}{2}Nk$. Esto es causado por el principio de exclusion de Pauliy la distribucion de Fermi-Dirac: unicamente electrones dentro de un intervalo de energia $\sim kT$ de el nivel de Fermi son excitado termicamente. Exsite una fraccion $\approx T/T_F$ exitada termicamente. La energia interana entonces se convierte:

$$U \approx NkT \frac{T}{T_F} \quad \text{and} \quad C = \frac{\partial U}{\partial T} \approx Nk \frac{T}{T_F}$$

Un analisis maass acertado revela: $C_{\text{electrons}} = \frac{1}{2}\pi^2 NkT/T_F \sim T$. Junto con la dependencia T^3 del la capaciad calorifica de los fonones, la capacidad termica de los metales es descrito por: $C = \gamma T + AT^3$.

12.5.2 Conduccion electrica

La ecuacion de movimiento para los portadores de carga es: $\vec{F} = m d\vec{v}/dt = \hbar d\vec{k}/dt$. La variacion de \vec{k} es descrita por $\delta\vec{k} = \vec{k}(t) - \vec{k}(0) = -e\vec{E}t/\hbar$. Si τ es el tiempo de colision caracteristica de los electrones, $\delta\vec{k}$ permanece estable si $t = \tau$. Entonces tenemos: $\langle\vec{v}\rangle = \mu\vec{E}$, con $\mu = e\tau/m$ la *movilidad* de los electrones.

La corriente en un conductor es dado por: $\vec{J} = nq\vec{v} = \sigma\vec{E} = \vec{E}/\rho = ne\mu\vec{E}$. Porque para el tiempo de colision se tiene: $1/\tau = 1/\tau_L + 1/\tau_i$, donde τ_L es el tiempo de colision con fonones en la capa y τ_i el tiempo de colision con las impurezas seguido de la resistividad $\rho = \rho_L + \rho_i$, con $\lim_{T \rightarrow 0} \rho_L = 0$.

12.5.3 El efecto Hall

Si un campo magnetico es aplicado \perp en la direccion de la corriente los portadores de carga seran enpujados a un lado por la fuerza de Lorentz. Esto resulta en un campo magnetico \perp al flujo en la direccion de la corriente. Si $\vec{J} = J\vec{e}_x$ y $\vec{B} = B\vec{e}_z$ maas $E_y/E_x = \mu B$. El coeficiente Hall es definido por: $R_H = E_y/J_x B$, y $R_H = -1/ne$ si $J_x = ne\mu E_x$. el voltaje Hall es descrito por: $V_H = Bvb = IB/neh$ donde b es el ancho de el material y h la altura.

12.5.4 Conductividad termica

Con $\ell = v_F\tau$ el camino libre medio de los electrones de $\kappa = \frac{1}{3}C\langle v\rangle\ell$: $\kappa_{\text{electrons}} = \pi^2 nk^2 T\tau/3m$. de este se tiene para la *razon de Wiedemann-Franz*: $\kappa/\sigma = \frac{1}{3}(\pi k/e)^2 T$.

12.6 Bandas de Energía

En la aproximación del *amarre fuerte* se asume que $\psi = e^{ikna}\phi(x - na)$. De lo que se concluye para la energía: $\langle E \rangle = \langle \psi | H | \psi \rangle = E_{\text{at}} - \alpha - 2\beta \cos(ka)$. Asi esto da un un coseno superimpuesto en un la energía atomica, que es frecuentemente aproximado por un oscilador armonico. Si se asume que el electrón es libre, podemos postular: $\psi = \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r})$. Esto es una onda viajera. La onda puede ser descompuesta en dos ondas estacionarias:

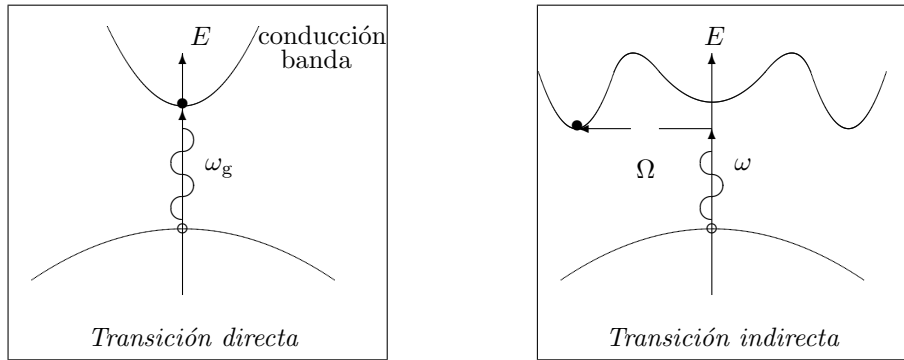
$$\begin{aligned}\psi(+) &= \exp(i\pi x/a) + \exp(-i\pi x/a) = 2 \cos(\pi x/a) \\ \psi(-) &= \exp(i\pi x/a) - \exp(-i\pi x/a) = 2i \sin(\pi x/a)\end{aligned}$$

La densidad de probabilidad $|\psi(+)|^2$ es alta cerca de los atomos de la red y bajo entre ellos. La densidad de probabilidad $|\psi(-)|^2$ es pequenna cerca de los atomos de la red y alta entre ellos. De ahí, la energía de $\psi(+)$ es tambien es mas pequena que la energía de $\psi(-)$. Supongamos que $U(x) = U \cos(2\pi x/a)$, mas el bandgapes descrito por:

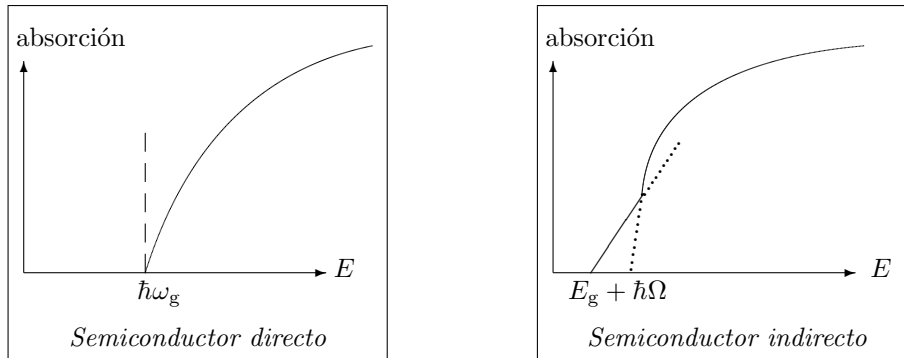
$$E_{\text{gap}} = \int_0^1 U(x) [|\psi(+)|^2 - |\psi(-)|^2] dx = U$$

12.7 Semiconductores

Las estructuras de bandas y las transiciones entre ellos de un semiconductor directo e indirecto son mostradas en las figuras abajo. Aquí se puede despreciar la diferencia de momentun por la absorción de un foton. Para un semiconductor directo una transición de la banda de valencia es también posible si la energía de los fotones absorbidos es más pequeña que la banda de separación: luego, el foton es absorbido también.



Esta diferencia también se puede observar en un espectro de absorción :



Así semiconductores indirectos, como Si y Ge, no pueden emitir ninguna luz y entonces no son ventajosos para fabricar láseres. Cuando la luz es absorbida se tiene: $\vec{k}_h = -\vec{k}_e$, $E_h(\vec{k}_h) = -E_e(\vec{k}_e)$, $\vec{v}_h = \vec{v}_e$ and $m_h = -m_e^*$ si la banda de conducción y la banda de valencia tienen la misma estructura.

En lugar de la masa norma del electrón debemos emplear la *masa efectiva* within a lattice. It is defined by:

$$m^* = \frac{F}{a} = \frac{dp/dt}{dv_g/dt} = \hbar \frac{dK}{dv_g} = \hbar^2 \left(\frac{d^2E}{dk^2} \right)^{-1}$$

con $E = \hbar\omega$ y $v_g = d\omega/dk$ y $p = \hbar k$.

Con la función de distribución $f_e(E) \approx \exp((\mu - E)/kT)$ para el electrón y $f_h(E) = 1 - f_e(E)$ para los huecos de densidad de estados es dado por:

$$D(E) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m^*}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{E - E_c}$$

con E_c la energía al limite de la banda de conductancia. De este se tiene para las concentraciones de los huecos p y los electrones n :

$$n = \int_{E_c}^{\infty} D_e(E) f_e(E) dE = 2 \left(\frac{m^* kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \exp \left(\frac{\mu - E_c}{kT} \right)$$

Para el producto np obtenemos: $np = 4 \left(\frac{kT}{2\pi\hbar^2} \right)^3 \sqrt{m_e^* m_h} \exp \left(-\frac{E_g}{kT} \right)$

Para un semiconductor intrínseco (sin impurezas) tenemos: $n_i = p_i$, para un tipo n tenemos: $n > p$ y en un tipo p tenemos: $n < p$.

Un exciton es una unio de un par electrón–hueco, rotando uno al otro como en un positronio. La energía de excitación de un exciton es más pequeña que en el bandgap porque la energía de un exciton es menor que la energía de un electrón libre e un hueco libre. Esto causa un pico en l absorción y justo debajo de E_g .

12.8 Superconductividad

12.8.1 Descripción

Un superconductor es caracterizado por su resistencia cero si ciertas cantidades son pequeñas en comparación con valores críticos: $T < T_c$, $I < I_c$ and $H < H_c$. El *modelo BCS* predice para la temperatura de transición T_c :

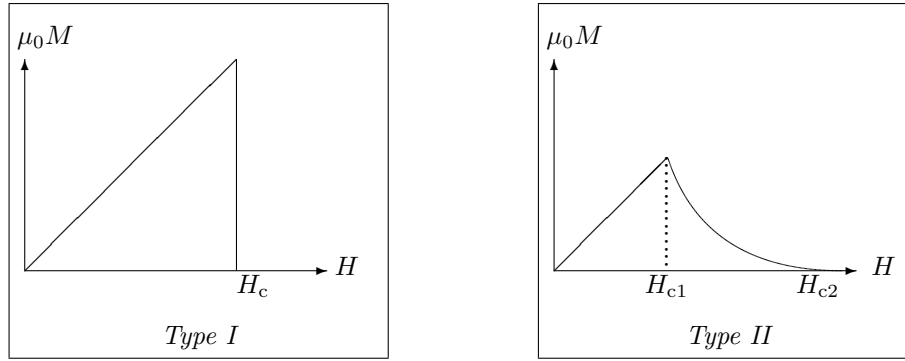
$$T_c = 1.14\Theta_D \exp\left(\frac{-1}{UD(E_F)}\right)$$

mientras que en los experimentos se encuentra que H_c aproximadamente:

$$H_c(T) \approx H_c(T_c) \left(1 - \frac{T^2}{T_c^2}\right).$$

Dentro de un superconductor el campo magnetico es 0: que es el *efecto Meissner*.

Existen superconductores tipo I y tipo II. Porque el efecto Meissner Implicas que un superconductor es un perfecto diamagnetico holds en el estado superconductor: $\vec{H} = \mu_0 \vec{M}$. Esto desencadena para el superconductor tipo I, para el tipo superconductor II esto soolo holds un cierto valor H_{c1} , Para valores mas grandes de H el superconductor es un *estado vortex* to a value H_{c2} , que puede ser 100 veces H_{c1} . Si H se converite más grande que H_{c2} el superconductor se convierte en un normal conductor. Como lo muestra la figura de abajo.



La transición del estado superconductor es un estado de transición de segundo orden termodinámico. Esto significa que existe un doblez en el diagrama $T-S$ y una discontinuidad en el diagrama C_X-T .

12.8.2 El efecto Josephson

Para el efecto Josephson consideramos dos superconductores, separados por un aislante. La función de onda en un superconductor es ψ_1 , en el otro ψ_2 . La ecuación de Schrödinger en ambos superconductores es igual:

$$i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = \hbar T \psi_2 \quad , \quad i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = \hbar T \psi_1$$

$\hbar T$ es el efecto del acoplamiento de los electrones, o la transferencia a través del aislante. La función de onda de los electrones son escritas como $\psi_1 = \sqrt{n_1} \exp(i\theta_1)$ and $\psi_2 = \sqrt{n_2} \exp(i\theta_2)$. Porque un par de Cooper existe entre *two* electrones, se tiene: $\psi \sim \sqrt{n}$. De esto se obtiene, si $n_1 \approx n_2$:

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} = \frac{\partial \theta_2}{\partial t} \quad \text{and} \quad \frac{\partial n_2}{\partial t} = -\frac{\partial n_1}{\partial t}$$

El efecto Josephson resulta en una corriente de densidad a través del aislante, dependiendo de la diferencia de fase como: $J = J_0 \sin(\theta_2 - \theta_1) = J_0 \sin(\delta)$, where $J_0 \sim T$. Con un voltaje AC cruzando la interfase, La ecuación de Schrödinger se escribe:

$$i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = \hbar T \psi_2 - eV \psi_1 \quad \text{and} \quad i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = \hbar T \psi_1 + eV \psi_2$$

Obteniendo: $J = J_0 \sin \left(\theta_2 - \theta_1 - \frac{2eVt}{\hbar} \right)$.

Existiendo una oscilación con $\omega = 2eV/\hbar$.

12.8.3 Cuantización del flujo en un anillo superconductor

Para la densidad de corriente en general se obtiene: $\vec{J} = q\psi^* \vec{v} \psi = \frac{nq}{m} [\hbar \vec{\nabla} \theta - q \vec{A}]$

Para el efecto Meissner, $\vec{B} = 0$ y $\vec{J} = 0$, siguiendo: $\hbar \vec{\nabla} \theta = q \vec{A} \Rightarrow \oint \vec{\nabla} \theta dl = \theta_2 - \theta_1 = 2\pi s$ with $s \in \mathbb{N}$. Porque: $\oint \vec{A} dl = \iint (\text{rot} \vec{A}, \vec{n}) d\sigma = \iint (\vec{B}, \vec{n}) d\sigma = \Psi$ follows: $\Psi = 2\pi \hbar s / q$. The size of a flux quantum follows by setting $s = 1$: $\Psi = 2\pi \hbar / e = 2.0678 \cdot 10^{-15} \text{ Tm}^2$.

12.8.4 Interferencia cuántica microscópica

De $\theta_2 - \theta_1 = 2e\Psi/\hbar$ siguiendo para dos uniones paralelas: $\delta_b - \delta_a = \frac{2e\Psi}{\hbar}$, así

$J = J_a + J_b = 2J_0 \sin \left(\delta_0 \cos \left(\frac{e\Psi}{\hbar} \right) \right)$ Encontrando un máximo si $e\Psi/\hbar = s\pi$.

12.8.5 La ecuación de London

Una densidad de corriente en un superconductor proporcional a un potencial vectorial \vec{A} es postulado:

$$\vec{J} = \frac{-\vec{A}}{\mu_0 \lambda_L^2} \quad \text{or} \quad \text{rot} \vec{J} = \frac{-\vec{B}}{\mu_0 \lambda_L^2}$$

donde $\lambda_L = \sqrt{\epsilon_0 m c^2 / n q^2}$. De lo que se encuentra: $\nabla^2 \vec{B} = \vec{B} / \lambda_L^2$.

El efecto Meissner es la solución de esta ecuación: $\vec{B}(x) = B_0 \exp(-x/\lambda_L)$. Campos magnéticos que exponencialmente disminuyen.

12.8.6 El modelo BCS

El modelo BCS puede explicar superconductividad en metales. (hasta este momento no contamos con una explicación para superconductividad a temperaturas más altas que altas T_c).

Lattice = red Un nuevo estado base donde los electrones se comportan como fermiones independientes es postulado. Debido a la interacción con la red de estas de estas pseudo-partículas exhiben una atracción mutua. Esto causa la combinación de dos electrones de spin opuesto. En un *par de Cooper*. Los causantes de que en el estado base exista un diamagnetismo perfecto

La conductividad infinita es más difícil de explicar porque un anillo con una corriente continua no está en real equilibrio: un estado con corriente cero tiene una menor energía. La cuantización del flujo previene transiciones entre estos estados. La cuantización del flujo es relacionada a la existencia de una función de onda de muchas partículas coherente. Un flujo cuántico es el equivalente alrededor de 10^4 electrones. Luego, si el flujo tiene que cambiar un flujo cuántico aparecerá una transición de muchos electrones, que es muy improbable, o el sistema debe aumentar los estados donde el flujo no es cuantizado, así ellos tienen una mayor energía. Esto es también poco improbable.

Algunas relaciones matemáticas útiles son:

$$\int_0^\infty \frac{x dx}{e^{ax} + 1} = \frac{\pi^2}{12a^2}, \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{x^2 dx}{(e^x + 1)^2} = \frac{\pi^2}{3}, \quad \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x + 1} = \frac{\pi^4}{15}$$

Y, cuando $\sum_{n=0}^\infty (-1)^n = \frac{1}{2}$ siguiendo: $\int_0^\infty \sin(px) dx = \int_0^\infty \cos(px) dx = \frac{1}{p}$.

Chapter 13

Teoría de grupos

13.1 Introducción

13.1.1 Definición de un grupo

\mathcal{G} es un grupo para el operador \bullet si:

1. $\forall A, B \in \mathcal{G} \Rightarrow A \bullet B \in \mathcal{G}$: \mathcal{G} es *cerrado*.
2. $\forall A, B, C \in \mathcal{G} \Rightarrow (A \bullet B) \bullet C = A \bullet (B \bullet C)$: \mathcal{G} obedece a la *ley asociativa*.
3. $\exists E \in \mathcal{G}$ de modo $\forall A \in \mathcal{G} A \bullet E = E \bullet A = A$: \mathcal{G} tiene un *elemento unitario*.
4. $\forall A \in \mathcal{G} \exists A^{-1} \in \mathcal{G}$ de modo $A \bullet A^{-1} = E$: Cada elemento en \mathcal{G} tiene un *inverso*.

si también se presenta:

5. $\forall A, B \in \mathcal{G} \Rightarrow A \bullet B = B \bullet A$ el grupo es llamado *Abeliano* o *conmutativo*.

13.1.2 La tabla de Cayley

Cada elemento aparece solamente una vez cada fila y columna de la tabla de Cayley tabla de multiplicación: porque $EA_i = A_k^{-1}(A_k A_i) = A_i$ cada A_i Aparece una vez. Existen h posiciones en cada fila y columna cuando hay h Elementos en el grupo, así cada elemento aparece una sola vez.

13.1.3 Elementos subgrupos y clases conjugadas

B es *conjugado* para A si $\exists X \in \mathcal{G}$ tal que $B = XAX^{-1}$. Entonces A es entonces conjugado para B porque $B = (X^{-1})A(X^{-1})^{-1}$.

Si B y C son conjugados para A , B es tambien conjugado con C .

Un *subgroupo* es un una sub-colección de \mathcal{G} que es tambien un grupo w.r.t. la misma operación.

Una *clase conjugada* es la máxima colección de elementos conjugados. Cada grupo puede ser dividido en una clase conjugada. Algunos teoremas:

- Todas las clases son completamente desacopladas.
- E es una clase en si misma: por cada otro elemento en esta clase podemos tener: $A = XEX^{-1} = E$.
- E es la unica clase que es tambien un subgrupo porque todas las otras clase no tienen el elemento unidad.
- En un grupo abeliano es una clase separada.

La interpretación física de las clases: elementos de un grupo son usualmente operadores simétricos que mapean un objeto simétrico en si mismo. Elementos de una clase son entonces de la misma clase de operaciones. Lo opuesto no necesariamente debe de ser cierto.

13.1.4 Isomorfismo y homomorfismo; representaciones

Dos grupos son *isomorficos* si ellos tienen la misma tabla de multiplicación. El mapeo del grupo \mathcal{G}_1 a \mathcal{G}_2 , de modo que la tabla de multiplicación permanece igual, es un mapeo homomorfo.

Una *representación* es un homomorfo mapeo de un grupo a un grupo de matrices cuadradas con la matriz de multiplicación usual como un operador combinado. Esto es simbolizado por Γ . Los siguiente desemboca en:

$$\Gamma(E) = \mathbb{I} \quad , \quad \Gamma(AB) = \Gamma(A)\Gamma(B) \quad , \quad \Gamma(A^{-1}) = [\Gamma(A)]^{-1}$$

Para cada grupo existen tres posibilidades para una representación:

1. Una representación *cerrada*: todas las matrices son diferentes.
2. La representación $A \rightarrow \det(\Gamma(A))$.
3. La representación idéntica: $A \rightarrow 1$.

Una *representación equivalente* es obtenida por desarrollar una transformación de una base unitaria: $\Gamma'(A) = S^{-1}\Gamma(A)S$.

13.1.5 Representación reducibles e irreducibles

Si *la misma* transformación unitaria puede realizarse a todas las matrices de una representación Γ en la misma estructura de bloque la representación es llamada *reducible*:

$$\Gamma(A) = \begin{pmatrix} \Gamma^{(1)}(A) & 0 \\ 0 & \Gamma^{(2)}(A) \end{pmatrix}$$

Esto es escrito como: $\Gamma = \Gamma^{(1)} \oplus \Gamma^{(2)}$. Si esto no es posible la representación es llamada *irreducible*.

El número de representaciones iguales, el número de representaciones irreducibles iguala al número de clases conjugadas.

13.2 El fundamental del teorema de ortogonalidad

13.2.1 El lema de Schur

Lema: Cada matriz que conmuta con todas las matrices de una representación irreducible es constante $\times \mathbb{I}$, donde \mathbb{I} es la matriz unitaria. Lo opuesto es (por su puesto) también cierto.

Lema: Si existe una matriz M de modo que para dos representaciones irreducibles de grupo \mathcal{G} , $\gamma^{(1)}(A_i)$ y $\gamma^{(2)}(A_i)$, se obtiene: $M\gamma^{(1)}(A_i) = \gamma^{(2)}(A_i)M$, más que representaciones equivalentes, o $M = \underline{0}$.

13.2.2 El teorema fundamental de ortogonalidad

Para un conjunto de representaciones inequivalentes, irreducibles y unitarias; se obtiene, si h es el número de elementos en el grupo y ℓ_i es la dimension de la i^{th} representación:

$$\sum_{R \in \mathcal{G}} \Gamma_{\mu\nu}^{(i)*}(R) \Gamma_{\alpha\beta}^{(j)}(R) = \frac{h}{\ell_i} \delta_{ij} \delta_{\mu\alpha} \delta_{\nu\beta}$$

13.2.3 Carácter

El *carácter* de una representación es dado por la traza de la matriz y es entonces invariante para la base de transformaciones: $\chi^{(j)}(R) = \text{Tr}(\Gamma^{(j)}(R))$

También se obtiene, con N_k el número de elementos en la clase conjugada: $\sum_k \chi^{(i)*}(C_k) \chi^{(j)}(C_k) N_k = h \delta_{ij}$

Teorema: $\sum_{i=1}^n \ell_i^2 = h$

13.3 La relación con la mecánica cuántica

13.3.1 Representations, energy levels and degeneracy

Consider a set of symmetry transformations $\vec{x}' = R\vec{x}$ which leave the Hamiltonian \mathcal{H} invariant. These transformations are a group. An isomorphic operation on the wavefunction is given by: $P_R\psi(\vec{x}) = \psi(R^{-1}\vec{x})$. This is considered an *active rotation*. These operators commute with \mathcal{H} : $P_R\mathcal{H} = \mathcal{H}P_R$, and leave the volume element unchanged: $d(R\vec{x}) = d\vec{x}$.

P_R is the symmetry group of the physical system. It causes degeneracy: if ψ_n is a solution of $\mathcal{H}\psi_n = E_n\psi_n$ than also holds: $\mathcal{H}(P_R\psi_n) = E_n(P_R\psi_n)$. A degeneracy which is not the result of a symmetry is called an *accidental degeneracy*.

Assume an ℓ_n -fold degeneracy at E_n : then choose an orthonormal set $\psi_\nu^{(n)}$, $\nu = 1, 2, \dots, \ell_n$. The function $P_R\psi_\nu^{(n)}$ is in the same subspace: $P_R\psi_\nu^{(n)} = \sum_{\kappa=1}^{\ell_n} \psi_\kappa^{(n)} \Gamma_{\kappa\nu}^{(n)}(R)$

donde $\Gamma^{(n)}$ es una representación *irreducible*, *unitario* del grupo simétrico del sistema \mathcal{G} . Cada n corresponde a otro nivel de energía. Podemos derivar matemática representaciones irreducibles de grupos de simetría y etiquetar el nivel de energía con un número cuántico. Una elección fija de $\Gamma^{(n)}(R)$ define la funciones base $\psi_\nu^{(n)}$. De este modo podemos también etiquetar cada base de funciones con un número cuántico.

Particle in a periodical potential: the symmetry operation is a cyclic group: note the operator describing one translation over one unit as A . Then: $\mathcal{G} = \{A, A^2, A^3, \dots, A^h = E\}$.

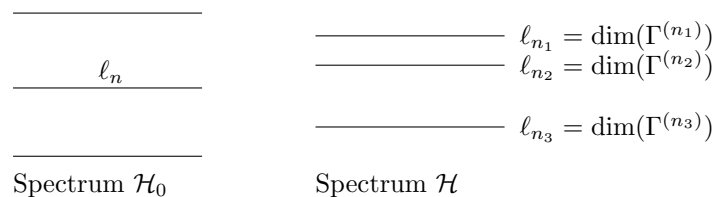
The group is Abelian so all irreducible representations are one-dimensional. For $0 \leq p \leq h-1$ follows:

$$\Gamma^{(p)}(A^n) = e^{2\pi i p n / h}$$

Si definimos: $k = -\frac{2\pi p}{ah} \left(\text{mod} \frac{2\pi}{a} \right)$, así: $P_A\psi_p(x) = \psi_p(x-a) = e^{2\pi i p / h} \psi_p(x)$, ello da el *teorema Bloch*: $\psi_k(x) = u_k(x)e^{ikx}$, con $u_k(x \pm a) = u_k(x)$.

13.3.2 Breaking of degeneracy by a perturbation

Suppose the unperturbed system has Hamiltonian \mathcal{H}_0 and symmetry group \mathcal{G}_0 . The perturbed system has $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{V}$, and symmetry group $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}_0$. If $\Gamma^{(n)}(R)$ is an irreducible representation of \mathcal{G}_0 , it is also a representation of \mathcal{G} but not all elements of $\Gamma^{(n)}$ in \mathcal{G}_0 are also in \mathcal{G} . The representation then usually becomes *reducible*: $\Gamma^{(n)} = \Gamma^{(n_1)} \oplus \Gamma^{(n_2)} \oplus \dots$. The degeneracy is then (possibly partially) removed: see the figure below.



Teorema: El conjunto de ℓ_n funciones degeneradas $\psi_\nu^{(n)}$ con energia E_n es un vase para un irreducible representation de dimension ℓ_n $\Gamma^{(n)}$ del grupo de simetria.

13.3.3 La construccin de una base de funciones

Cada funcion F en el espacio de configuracion puede ser reestructurada en *clases de simetria*: $F = \sum_{j=1}^n \sum_{\kappa=1}^{\ell_j} f_\kappa^{(j)}$

Los siguientes operadores extraen las clases de simetria:

$$\left(\frac{\ell_j}{h} \sum_{R \in G} \Gamma_{\kappa\kappa}^{(j)*}(R) P_R \right) F = f_\kappa^{(j)}$$

Esto es expresado como: $f_\kappa^{(j)}$ es la parte de F que trasforma de acuerdo a la κ^{th} fila de $\Gamma^{(j)}$.

F puede ser tambien expresado en la funciones base φ : $F = \sum_{a,j,\kappa} c_{aj\kappa} \varphi_\kappa^{(aj)}$. The functions $f_\kappa^{(j)}$ are in general not transformed into each other by elements of the group. However, this does happen if $c_{ja\kappa} = c_{ja}$.

Theorem: Two wavefunctions transforming according to non-equivalent unitary representations or according to different rows of an unitary irreducible representation are orthogonal:

$\langle \varphi_\kappa^{(i)} | \psi_\lambda^{(j)} \rangle \sim \delta_{ij} \delta_{\kappa\lambda}$, and $\langle \varphi_\kappa^{(i)} | \psi_\kappa^{(i)} \rangle$ is independent of κ .

13.3.4 The direct product of representations

Consider a physical system existing of two subsystems. The subspace $D^{(i)}$ of the system transforms according to $\Gamma^{(i)}$. Basefunctions are $\varphi_\kappa^{(i)}(\vec{x}_i)$, $1 \leq \kappa \leq \ell_i$. Now form all $\ell_1 \times \ell_2$ products $\varphi_\kappa^{(1)}(\vec{x}_1) \varphi_\lambda^{(2)}(\vec{x}_2)$. These define a space $D^{(1)} \otimes D^{(2)}$.

These product functions transform as:

$$P_R(\varphi_\kappa^{(1)}(\vec{x}_1) \varphi_\lambda^{(2)}(\vec{x}_2)) = (P_R \varphi_\kappa^{(1)}(\vec{x}_1)) (P_R \varphi_\lambda^{(2)}(\vec{x}_2))$$

In general the space $D^{(1)} \otimes D^{(2)}$ can be split up in a number of invariant subspaces:

$$\Gamma^{(1)} \otimes \Gamma^{(2)} = \sum_i n_i \Gamma^{(i)}$$

A useful tool for this reduction is that for the characters hold:

$$\chi^{(1)}(R) \chi^{(2)}(R) = \sum_i n_i \chi^{(i)}(R)$$

13.3.5 Clebsch-Gordan coefficients

With the reduction of the direct-product matrix w.r.t. the basis $\varphi_\kappa^{(i)} \varphi_\lambda^{(j)}$ one uses a new basis $\varphi_\mu^{(ak)}$. These base functions lie in subspaces $D^{(ak)}$. The unitary base transformation is given by:

$$\varphi_\mu^{(ak)} = \sum_{\kappa\lambda} \varphi_\kappa^{(i)} \varphi_\lambda^{(j)} (i\kappa j \lambda | a k \mu)$$

and the inverse transformation by: $\varphi_\kappa^{(i)} \varphi_\lambda^{(j)} = \sum_{a k \mu} \varphi_\mu^{(ak)} (a k \mu | i \kappa j \lambda)$

In essence the Clebsch-Gordan coefficients are dot products: $(i\kappa j \lambda | a k \mu) := \langle \varphi_\kappa^{(i)} \varphi_\lambda^{(j)} | \varphi_\mu^{(ak)} \rangle$

13.3.6 Symmetric transformations of operators, irreducible tensor operators

Observables (operators) transform as follows under symmetry transformations: $A' = P_R A P_R^{-1}$. If a set of operators $A_\kappa^{(j)}$ with $0 \leq \kappa \leq \ell_j$ transform into each other under the transformations of \mathcal{G} holds:

$$P_R A_\kappa^{(j)} P_R^{-1} = \sum_\nu A_\nu^{(j)} \Gamma_{\nu\kappa}^{(j)}(R)$$

If $\Gamma^{(j)}$ is irreducible they are called *irreducible tensor operators* $A^{(j)}$ with components $A_\kappa^{(j)}$.

An operator can also be decomposed into symmetry types: $A = \sum_{jk} a_k^{(j)}$, with:

$$a_\kappa^{(j)} = \left(\frac{\ell_j}{h} \sum_{R \in \mathcal{G}} \Gamma_{\kappa\kappa}^{(j)*}(R) \right) (P_R A P_R^{-1})$$

Theorem: Matrix elements H_{ij} of the operator \mathcal{H} which is invariant under $\forall_{A \in \mathcal{G}}$, are 0 between states which transform according to non-equivalent irreducible unitary representations or according to different rows of such a representation. Further $\langle \varphi_\kappa^{(i)} | \mathcal{H} | \psi_\kappa^{(i)} \rangle$ is independent of κ . For $\mathcal{H} = 1$ this becomes the previous theorem.

This is applied in quantum mechanics in *perturbation theory* and *variational calculus*. Here one tries to diagonalize \mathcal{H} . Solutions can be found within each category of functions $\varphi_\kappa^{(i)}$ with common i and κ : \mathcal{H} is already diagonal in categories as a whole.

Perturbation calculus can be applied independent within each category. With variational calculus the try function can be chosen within a separate category because the exact eigenfunctions transform according to a row of an irreducible representation.

13.3.7 The Wigner-Eckart theorem

Theorem: The matrix element $\langle \varphi_\lambda^{(i)} | A_\kappa^{(j)} | \psi_\mu^{(k)} \rangle$ can only be $\neq 0$ if $\Gamma^{(j)} \otimes \Gamma^{(k)} = \dots \oplus \Gamma^{(i)} \oplus \dots$. If this is the case holds (if $\Gamma^{(i)}$ appears only once, otherwise one has to sum over a):

$$\langle \varphi_\lambda^{(i)} | A_\kappa^{(j)} | \psi_\mu^{(k)} \rangle = (i\lambda | j\kappa k\mu) \langle \varphi^{(i)} | A^{(j)} | \psi^{(k)} \rangle$$

This theorem can be used to determine selection rules: the probability of a dipole transition is given by ($\vec{\epsilon}$ is the direction of polarization of the radiation):

$$P_D = \frac{8\pi^2 e^2 f^3 |r_{12}|^2}{3\hbar \epsilon_0 c^3} \quad \text{with} \quad r_{12} = \langle l_2 m_2 | \vec{\epsilon} \cdot \vec{r} | l_1 m_1 \rangle$$

Further it can be used to determine intensity ratios: if there is only one value of a the ratio of the matrix elements are the Clebsch-Gordan coefficients. For more a -values relations between the intensity ratios can be stated. However, the intensity ratios are also dependent on the occupation of the atomic energy levels.

13.4 Continuous groups

Continuous groups have $h = \infty$. However, not all groups with $h = \infty$ are continuous, e.g. the translation group of an spatially infinite periodic potential is not continuous but does have $h = \infty$.

13.4.1 The 3-dimensional translation group

For the translation of wavefunctions over a distance a holds: $P_a \psi(x) = \psi(x - a)$. Taylor expansion near x gives:

$$\psi(x - a) = \psi(x) - a \frac{d\psi(x)}{dx} + \frac{1}{2} a^2 \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} - \dots$$

Because the momentum operator in quantum mechanics is given by: $p_x = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$, this can be written as:

$$\psi(x - a) = e^{-iap_x/\hbar} \psi(x)$$

13.4.2 The 3-dimensional rotation group

This group is called SO(3) because a faithful representation can be constructed from orthogonal 3×3 matrices with a determinant of +1.

For an infinitesimal rotation around the x -axis holds:

$$\begin{aligned} P_{\delta\theta_x} \psi(x, y, z) &\approx \psi(x, y + z\delta\theta_x, z - y\delta\theta_x) \\ &= \psi(x, y, z) + \left(z\delta\theta_x \frac{\partial}{\partial y} - y\delta\theta_x \frac{\partial}{\partial z} \right) \psi(x, y, z) \\ &= \left(1 - \frac{i\delta\theta_x L_x}{\hbar} \right) \psi(x, y, z) \end{aligned}$$

Because the angular momentum operator is given by: $L_x = \frac{\hbar}{i} \left(z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z} \right)$.

So in an arbitrary direction holds: Rotations: $P_{\alpha, \vec{n}} = \exp(-i\alpha(\vec{n} \cdot \vec{J})/\hbar)$
Translations: $P_{a, \vec{n}} = \exp(-ia(\vec{n} \cdot \vec{p})/\hbar)$

J_x , J_y and J_z are called the *generators* of the 3-dim. rotation group, p_x , p_y and p_z are called the generators of the 3-dim. translation group.

The commutation rules for the generators can be derived from the properties of the group for multiplications: translations are interchangeable $\leftrightarrow p_x p_y - p_y p_x = 0$.

Rotations are not generally interchangeable: consider a rotation around axis \vec{n} in the xz -plane over an angle α . Then holds: $P_{\alpha, \vec{n}} = P_{-\theta, y} P_{\alpha, x} P_{\theta, y}$, so:

$$e^{-i\alpha(\vec{n} \cdot \vec{J})/\hbar} = e^{i\theta J_y/\hbar} e^{-i\alpha J_x/\hbar} e^{-i\theta J_y/\hbar}$$

If α and θ are very small and are expanded to second order, and the corresponding terms are put equal with $\vec{n} \cdot \vec{J} = J_x \cos \theta + J_z \sin \theta$, it follows from the $\alpha\theta$ term: $J_x J_y - J_y J_x = i\hbar J_z$.

13.4.3 Properties of continuous groups

The elements $R(p_1, \dots, p_n)$ depend continuously on parameters p_1, \dots, p_n . For the translation group this are e.g. an_x , an_y and an_z . It is demanded that the multiplication and inverse of an element R depend continuously on the parameters of R .

The statement that each element arises only once in each row and column of the Cayley table holds also for continuous groups. The notion conjugacy class for continuous groups is defined equally as for discrete groups. The notion representation is fitted by demanding continuity: each matrix element depends continuously on $p_i(R)$.

Summation over all group elements is for continuous groups replaced by an integration. If $f(R)$ is a function defined on \mathcal{G} , e.g. $\Gamma_{\alpha\beta}(R)$, holds:

$$\int_{\mathcal{G}} f(R) dR := \int_{p_1} \dots \int_{p_n} f(R(p_1, \dots, p_n)) g(R(p_1, \dots, p_n)) dp_1 \dots dp_n$$

Here, $g(R)$ is the *density function*.

Because of the properties of the Cayley table is demanded: $\int f(R)dR = \int f(SR)dR$. This fixes $g(R)$ except for a constant factor. Define new variables p' by: $SR(p_i) = R(p'_i)$. If one writes: $dV := dp_1 \cdots dp_n$ holds:

$$g(S) = g(E) \frac{dV}{dV'}$$

Here, $\frac{dV}{dV'}$ is the *Jacobian*: $\frac{dV}{dV'} = \det \left(\frac{\partial p_i}{\partial p'_j} \right)$, and $g(E)$ is constant.

For the translation group holds: $g(\vec{a}) = \text{constant} = g(\vec{0})$ because $g(a\vec{n})d\vec{a}' = g(\vec{0})d\vec{a}$ and $d\vec{a}' = d\vec{a}$.

This leads to the fundamental orthogonality theorem:

$$\int_{\mathcal{G}} \Gamma_{\mu\nu}^{(i)*}(R) \Gamma_{\alpha\beta}^{(j)}(R) dR = \frac{1}{\ell_i} \delta_{ij} \delta_{\mu\alpha} \delta_{\nu\beta} \int_{\mathcal{G}} dR$$

and for the characters hold:

$$\int_{\mathcal{G}} \chi^{(i)*}(R) \chi^{(j)}(R) dR = \delta_{ij} \int_{\mathcal{G}} dR$$

Compact groups are groups with a finite group volume: $\int_{\mathcal{G}} dR < \infty$.

13.5 The group SO(3)

One can take 2 parameters for the direction of the rotational axis and one for the angle of rotation φ . The parameter space is a collection points $\varphi\vec{n}$ within a sphere with radius π . The diametrical points on this sphere are equivalent because $R_{\vec{n},\pi} = R_{-\vec{n},-\pi}$.

Another way to define parameters is by means of *Eulers angles*. If α , β and γ are the 3 Euler angles, defined as:

1. The spherical angles of axis 3 w.r.t. xyz are $\theta, \varphi := \beta, \alpha$. Now a rotation around axis 3 remains possible.
2. The spherical angles of the z -axis w.r.t. 123 are $\theta, \varphi := \beta, \pi - \gamma$.

then the rotation of a quantum mechanical system is described by:

$\psi \rightarrow e^{-i\alpha J_z/\hbar} e^{-i\beta J_y/\hbar} e^{-i\gamma J_z/\hbar} \psi$. So $P_R = e^{-i\varepsilon(\vec{n}\cdot\vec{J})/\hbar}$.

All irreducible representations of SO(3) can be constructed from the behaviour of the spherical harmonics $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ with $-l \leq m \leq l$ and for a fixed l :

$$P_R Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sum_{m'} Y_{lm'}(\theta, \varphi) D_{mm'}^{(l)}(R)$$

$D^{(l)}$ is an irreducible representation of dimension $2l + 1$. The character of $D^{(l)}$ is given by:

$$\chi^{(l)}(\alpha) = \sum_{m=-l}^l e^{im\alpha} = 1 + 2 \sum_{k=0}^l \cos(k\alpha) = \frac{\sin([l + \frac{1}{2}]\alpha)}{\sin(\frac{1}{2}\alpha)}$$

In the performed derivation α is the rotational angle around the z -axis. This expression is valid for all rotations over an angle α because the classes of SO(3) are rotations around the same angle around an axis with an arbitrary orientation.

Via the fundamental orthogonality theorem for characters one obtains the following expression for the density function (which is normalized so that $g(0) = 1$):

$$g(\alpha) = \frac{\sin^2(\frac{1}{2}\alpha)}{(\frac{1}{2}\alpha)^2}$$

With this result one can see that the given representations of $SO(3)$ are the only ones: the character of another representation χ' would have to be \perp to the already found ones, so $\chi'(\alpha) \sin^2(\frac{1}{2}\alpha) = 0 \forall \alpha \Rightarrow \chi'(\alpha) = 0 \forall \alpha$. This is contradictory because the dimension of the representation is given by $\chi'(0)$.

Because fermions have an half-odd integer spin the states ψ_{sm_s} with $s = \frac{1}{2}$ and $m_s = \pm \frac{1}{2}$ constitute a 2-dim. space which is invariant under rotations. A problem arises for rotations over 2π :

$$\psi_{\frac{1}{2}m_s} \rightarrow e^{-2\pi i S_z / \hbar} \psi_{\frac{1}{2}m_s} = e^{-2\pi i m_s} \psi_{\frac{1}{2}m_s} = -\psi_{\frac{1}{2}m_s}$$

However, in $SO(3)$ holds: $R_{z,2\pi} = E$. So here holds $E \rightarrow \pm I$. Because observable quantities can always be written as $\langle \phi | \psi \rangle$ or $\langle \phi | A | \psi \rangle$, and are bilinear in the states, they do not change sign if the states do. If only one state changes sign the observable quantities do change.

The existence of these half-odd integer representations is connected with the topological properties of $SO(3)$: the group is two-fold coherent through the identification $R_0 = R_{2\pi} = E$.

13.6 Aplicaciones de la mecánica cuántica

13.6.1 Modelo de vectores en la adicción del momento angular

Si dos subsistemas tienen un momento angular, los números cuánticos j_1 y j_2 los únicos posibles valores para el momento angular total son $J = j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1, \dots, |j_1 - j_2|$. Este puede ser derivado de la teoría de grupos como sigue: de $\chi^{(j_1)}(\alpha) \chi^{(j_2)}(\alpha) = \sum_J n_J \chi^{(J)}(\alpha)$ continuando:

$$D^{(j_1)} \otimes D^{(j_2)} = D^{(j_1+j_2)} \oplus D^{(j_1+j_2-1)} \oplus \dots \oplus D^{(|j_1-j_2|)}$$

Los estados pueden ser caracterizados por los números cuánticos en dos modos: con j_1, m_1, j_2, m_2 and with j_1, j_2, J, M . Los coeficientes de Clebsch-Gordan, para $SO(3)$ son llamados los *coeficientes de Wigner*, pueden ser escogidos reales, de tal modo:

$$\begin{aligned} \psi_{j_1 j_2 J M} &= \sum_{m_1 m_2} \psi_{j_1 m_1 j_2 m_2} (j_1 m_1 j_2 m_2 | J M) \\ \psi_{j_1 m_1 j_2 m_2} &= \sum_{J M} \psi_{j_1 j_2 J M} (j_1 m_1 j_2 m_2 | J M) \end{aligned}$$

13.6.2 Operadores tensoriales irreducibles, elementos de matriz y reglas de selección

Algunos ejemplos del comportamiento de operadores bajo $SO(3)$

1. Supongamos $j = 0$: obteniendo la representación idéntica con $\ell_j = 1$. Este estado es descrito por un operador escalar. Porque $P_R A_0^{(0)} P_R^{-1} = A_0^{(0)}$ este operador es invariante, por ejemplo, e.g. el en hamiltoniano de un átomo libre. Se obtiene: $\langle J' M' | \mathcal{H} | J M \rangle \sim \delta_{M M'} \delta_{J J'}$.
2. Un operador vectorial: $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$. Las componentes cartesianas de un transformación vectorial son equivalentes como las componentes cartesianas de \vec{r} , por definición. Así para rotaciones alrededor del eje z se tiene:

$$D(R_{\alpha,z}) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El operador de transformación tiene la misma matriz de elementos w.r.t. $P_R \psi$ y $P_R \phi$: $\langle P_R \psi | P_R A_x P_R^{-1} | P_R \phi \rangle = \langle \psi | A_x | \phi \rangle$, y $\chi(R_{\alpha,z}) = 1 + 2 \cos(\alpha)$. De acuerdo con la ecuación para caracteres esto significa que se debe escoger la base de operadores que transformen $Y_{1m}(\theta, \varphi)$. Por lo que se cambia a componentes esféricas:

$$A_{+1}^{(1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(A_x + iA_y), \quad A_0^{(1)} = A_z, \quad A_{-1}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_x - iA_y)$$

3. Un tensor cartesiano de rango 2: T_{ij} es una cantidad que transforma bajo rotaciones como $U_i V_j$, donde \vec{U} y \vec{V} son vectores. Así T_{ij} transforma como $P_R T_{ij} P_R^{-1} = \sum_{kl} T_{kl} D_{ki}(R) D_{lj}(R)$, también $D^{(1)} \otimes D^{(1)} = D^{(2)} \oplus D^{(1)} \oplus D^{(0)}$. Los nueve componentes pueden ser separados en tres subespacios invariantes con dimensión 1 ($D^{(0)}$), 3 ($D^{(1)}$) y 5 ($D^{(2)}$). La nueva base de operadores son:

- I. $\text{Tr}(\underline{T}) = T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}$. Transformando como el escalar $\vec{U} \cdot \vec{V}$, so as $D^{(0)}$.
- II. Las tres componentes antisimétricas $A_z = \frac{1}{2}(T_{xy} - T_{yx})$, etc. Estas transforman al vector $\vec{U} \times \vec{V}$, so as $D^{(1)}$.
- III. The 5 independent components of the traceless, symmetric tensor \underline{S} :
 $S_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\text{Tr}(\underline{T})$. These transform as $D^{(2)}$.

Reglas de selección para transiciones de dipole

Operadores de dipolo como $D^{(1)}$: operador de dipolo electrico es $e\vec{r}$, de un magneto es $e(\vec{L} + 2\vec{S})/2m$.

Para el teorema de Wigner-Eckart se sigue: $\langle J' M' | A_{\kappa}^{(1)} | J M \rangle = 0$ excepto $D^{(J')}$ es la parte de $D^{(1)} \otimes D^{(J)} = D^{(J+1)} \oplus D^{(J)} \oplus D^{(|J-1|)}$. Ello significa que $J' \in \{J+1, J, |J-1|\}$: $J' = J$ o $J' = J \pm 1$, excepto $J' = J = 0$.

Landé-equation for the anomalous Zeeman splitting

According to Landé's model the interaction between a magnetic moment with an external magnetic field is determined by the projection of \vec{M} on \vec{J} because \vec{L} and \vec{S} precede fast around \vec{J} . This can also be understood from the Wigner-Eckart theorem: from this follows that the matrix elements from all vector operators show a certain proportionality. For an arbitrary operator \vec{A} follows:

$$\langle \alpha j m' | \vec{A} | \alpha j m \rangle = \frac{\langle \alpha j m | \vec{A} \cdot \vec{J} | \alpha j m \rangle}{j(j+1)\hbar^2} \langle \alpha j m' | \vec{J} | \alpha j m \rangle$$

13.7 Applications to particle physics

The physics of a system does not change after performing a transformation $\psi' = e^{i\delta}\psi$ where δ is a constant. This is a *transformación de norma global*: the phase of the wavefunction changes everywhere by the same amount.

Existe cierta libertad al escoger los potenciales \vec{A} y ϕ at igual que \vec{E} y \vec{B} : *transformaciones de norma* de los potenciales no se cambian \vec{E} y \vec{B} (Vea el capítulo 2 y 10). La solución ψ' de la ecuación de Schrödinger con los potenciales transformados es: $\psi' = e^{-iqf(\vec{r},t)}\psi$.

Esta es una *transformación de norma local*: La fase de la función de onda cambia en cada posición. Mientras que la física del sistema no cambia si \vec{A} y ϕ son también transformados. Esto es establecido como principio de guía: *el "derecho de existencia" del campo electromagnético es permitido en la invariancia de la norma local*.

Las transformaciones de norma del campo EM forma un grupo: $U(1)$, unitario de matrices 1×1 . La separación de la carga en el exponente es esencial al permitir un campo de norma para todas las partículas, independientemente de su carga.

Este concepto es generalizado: particullas tiene una "carga especial" Q . Los elementos de grupo ahora son $P_R = \exp(-iQ\Theta)$.

Otros campos de fuerza, diferentes al electromagnético, pueden también ser entendidos de este modo. La interacción débil junto con la interacción electromagnética también pueden ser descritas por un campo de fuerza que transforma acorde a $U(1) \otimes SU(2)$, y consiste de un foton y tres vectores bosonicos intermediarios. El color de la fuerza es descrito por $SU(3)$, y tiene un campo de norma que existe en los ocho tipos de gluones.

En general el grupo de elementos es descrito por $P_R = \exp(-i\vec{T} \cdot \vec{\Theta})$, donde Θ_n son constantes reales y T_n operadores (generadores), como Q . Las reglas de conmutación son dadas por $[T_i, T_j] = i \sum_k c_{ijk} T_k$.

Los c_{ijk} son las *constantes de estructura* del grupo. Para $SO(3)$ estas constantes son $c_{ijk} = \varepsilon_{ijk}$, aquí ε_{ijk} es el tensor antisimétrico completo con $\varepsilon_{123} = +1$.

Estas constantes pueden ser encontradas con la asistencia del producto de elementos de grupo, porque \mathcal{G} es cerrado, dando:

$e^{i\vec{\Theta} \cdot \vec{T}} e^{i\vec{\Theta}' \cdot \vec{T}} e^{-i\vec{\Theta} \cdot \vec{T}} e^{-i\vec{\Theta}' \cdot \vec{T}} = e^{-i\vec{\Theta}'' \cdot \vec{T}}$. La expansión de Taylor es acondicionada igual $\Theta^n \Theta'^m$ - términos resulta en la reglas de conmutación.

El grupo $SU(2)$ presenta tres parámetros libres: porque es unitario hay cuatro condiciones reales sobre cuatro parámetros complejos, y el determinante tiene que ser +1, por lo que permanecen tres parámetros libres.

Cada matriz unitaria U puede ser escrita como: $U = e^{-iH}$. Aquí, H es la matriz hermitiana. Para lo que se tiene: $\det(U) = e^{-i\text{Tr}(H)}$.

Para cada matriz de $SU(2)$ se tiene $\text{Tr}(H)=0$. Cada hermitiano sin traza 2×2 puede ser escrita como una combinación lineal de 3 *matrices de Pauli* σ_i . Así, estas matrices son una elección para los operadores de $SU(2)$. Podemos escribir: $SU(2)=\{\exp(-\frac{1}{2}i\vec{\sigma} \cdot \vec{\Theta})\}$.

En una abstracción, podemos considerar un grupo isomorfo donde únicamente las reglas de conmutación son confederados para los operadores T_i : $[T_1, T_2] = iT_3$, etc.

En física elemental de partículas el T_i puede ser interpretado como el operador de *isospin*. Partículas elementales pueden ser clasificadas en multipletes de isospin, hay representaciones irreducibles de $SU(2)$. La clasificación es:

1. El singlete isospin \equiv la representaron idéntica: $e^{-i\vec{T} \cdot \vec{\Theta}} = 1 \Rightarrow T_i = 0$
2. El doblete isospin \equiv la representacin representación de $SU(2)$ en 2×2 matrices.

El grupo $SU(3)$ presenta ocho parámetros libres. (El grupo $SU(N)$ tiene $N^2 - 1$ parámetros libres). El hermitiano, operador es sin traza son tres subgrupos $SU(2)$ en el $\vec{e}_1 \vec{e}_2$, $\vec{e}_1 \vec{e}_3$ y el $\vec{e}_2 \vec{e}_3$ plano. Ello da nueve matrices, las que no todas son linealmente independientes. Tomando una combinación lineal se obtienen ocho matrices.

En la densidad de Lagrange para la fuerza de color se tiene que sustituir $\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{D}{Dx} := \frac{\partial}{\partial x} - \sum_{i=1}^8 T_i A_x^i$

Los términos de tercer y cuarto orden en A muestran que el campo de color interactúa consigo mismo.

Chapter 14

Física nuclear

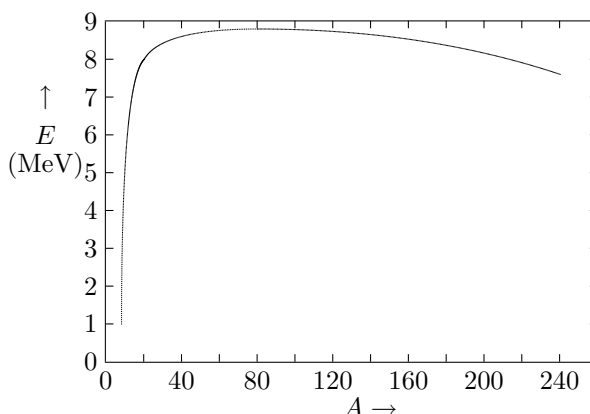
14.1 Fuerzas nucleares

La masa de núcleo se puede expresar como:

$$M_{\text{nuc}} = Zm_p + Nm_n - E_{\text{bind}}/c^2$$

La energía de atracción por nucleon se observa en la figura al lado derecho. En la parte superior es de ${}^{56}_{26}\text{Fe}$, El más estable de los núcleos. Con las constantes

$$\begin{aligned} a_1 &= 15.760 \text{ MeV} \\ a_2 &= 17.810 \text{ MeV} \\ a_3 &= 0.711 \text{ MeV} \\ a_4 &= 23.702 \text{ MeV} \\ a_5 &= 34.000 \text{ MeV} \end{aligned}$$



y $A = Z + N$, en el *droplet* o en el *modelo colectivo* del núcleo la energía de atracción $E_{\text{atraccion}}$ es dada por:

$$\frac{E_{\text{atraccion}}}{c^2} = a_1 A - a_2 A^{2/3} - a_3 \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - a_4 \frac{(N-Z)^2}{A} + \epsilon a_5 A^{-3/4}$$

Estos términos aparecen debido a:

1. a_1 : Energía de atracción de una fuerza nuclear fuerte, aproximadamente $\sim A$.
2. a_2 : Corrección de superficie: cerca del superficie del núcleo se presente menor atracción.
3. a_3 : Repulsión de Coulomb entre los protones.
4. a_4 : Término de Asimetría: un exceso de protones o neutrones muestra una menor energía de atracción
5. a_5 : Efecto Pair off: núcleos con un número par de protones o neutrones son más estables, porque grupos de dos protones o neutrones tienen una menor energía. Por lo que se tiene:

$$\begin{aligned} \underline{Z \text{ par}, N \text{ par}}: \epsilon &= +1, \underline{Z \text{ impar}, N \text{ impar}}: \epsilon = -1. \\ \underline{Z \text{ par}, N \text{ impar}}: \epsilon &= 0, \underline{Z \text{ impar}, N \text{ par}}: \epsilon = 0. \end{aligned}$$

El potencial de Yukawa puede ser derivado si la fuerza nuclear es aproximada, considerando como un intercambio de piones virtuales:

$$U(r) = -\frac{W_0 r_0}{r} \exp\left(-\frac{r}{r_0}\right)$$

Con $\Delta E \cdot \Delta t \approx \hbar$, $E_\gamma = m_0 c^2$ y $r_0 = c \Delta t$ seguidamente: $r_0 = \hbar / m_0 c$.

En el modelo de capas (*shell model*) del núcleo se asumen que un nucleon se mueve en un campo promedio de otros nucleones. Luego, existe una contribución del acoplamiento de los orbitales de spin $\sim \vec{L} \cdot \vec{S}$: $\Delta V_{ls} = \frac{1}{2}(2l+1)\hbar\omega$. Así cada nivel (n, l) es fraccionado en dos, con $j = l \pm \frac{1}{2}$, donde el estado con $j = l + \frac{1}{2}$ tiene la energía más pequeña. Justamente, esto es lo opuesto para los electrones,

lo que es una indicación que la interacción $L - S$ no es electromagnética. La energía de oscilador armónico tridimensional es $E = (N + \frac{3}{2})\hbar\omega$. $N = n_x + n_y + n_z = 2(n - 1) + l$ donde $n \geq 1$ es el principal número del oscilador. Porque $-l \leq m \leq l$ y $m_s = \pm \frac{1}{2}\hbar$ hay $2(2l + 1)$ sub-estados que existen independientemente de los protones y neutrones. Esto es lo que origina a los llamados *números mágicos*: núcleos donde cada estado en el nivel exterior están particularmente llenos y estables. Este es el caso si N o $Z \in \{2, 8, 20, 28, 50, 82, 126\}$.

14.2 La forma del núcleo

Una esfera, de radio $R = R_0 A^{1/3}$, es la primera aproximación de un núcleo. Aquí, $R_0 \approx 1.4 \cdot 10^{-15}$ m, constante para todos los núcleos. Si el radio nuclear medido incluyendo la distribución de carga se obtiene $R_0 \approx 1.2 \cdot 10^{-15}$ m. La forma de los núcleos oscilatorios puede describirse por medio de armónicos esféricos:

$$R = R_0 \left[1 + \sum_{lm} a_{lm} Y_l^m(\theta, \varphi) \right]$$

$l = 0$ gives rise to monopole vibrations, density vibrations, which can be applied to the theory of neutron stars. $l = 1$ gives dipole vibrations, $l = 2$ cuadrupolo, with $a_{2,0} = \beta \cos \gamma$ y $a_{2,\pm 2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\beta \sin \gamma$ donde β es el factor de deformación y γ el parámetro de forma. El momento multipolares dado por $\mu_l = Ze r^l Y_l^m(\theta, \varphi)$. La paridad de el momento electrico es $\Pi_E = (-1)^l$, del momento magnético $\Pi_M = (-1)^{l+1}$.

Existen dos contribuciones al momento magnético: $\vec{M}_L = \frac{e}{2m_p} \vec{L}$ y $\vec{M}_S = g_S \frac{e}{2m_p} \vec{S}$.

donde g_S es la *razón de spin-giromagnético*. Para los fotones se tiene $g_S = 5.5855$ y para neutrones $g_S = -3.8263$. Las componentes z del momento magnético son dadas por $M_{L,z} = \mu_N m_l$ y $M_{S,z} = g_S \mu_N m_s$. El momento magnético resultante es relacionado con el spin nuclear I de acuerdo con $\vec{M} = g_I (e/2m_p) \vec{I}$. La componente z es entonces $M_z = \mu_N g_I m_I$.

14.3 Decaimiento radiactivo

El número de de núcleos decayendo es proporcional al número de núcleos: $\dot{N} = -\lambda N$. Esto da para el número de núcleos N : $N(t) = N_0 \exp(-\lambda t)$. El *tiempo de vida media* siguiendo de $\tau_{\frac{1}{2}} \lambda = \ln(2)$. El promedio de tiempo de vida de un núcleo es $\tau = 1/\lambda$. La probabilidad que N núcleos decaen dentro de un intervalo de tiempo es descrito por la distribución de Poisson:

$$P(N)dt = N_0 \frac{\lambda^N e^{-\lambda}}{N!} dt$$

Si un núcleo puede decaer en más de dos estados finales se obtiene: $\lambda = \sum \lambda_i$. Así la fracción de decaimiento en el estado i es $\lambda_i / \sum \lambda_i$. Existen cinco tipos de decaimiento radiactivo natural:

1. decaimiento α : El núcleo emite un núcleo de He^{2+} . Porque el núcleo tiende a ordenarse en grupos de $2p+2n$ esto puede considerarse como tonelaje de un núcleo de He^{2+} a través de una barrera de potencial. La probabilidad P del efecto túnel es

$$P = \frac{\text{amplitud de entrada}}{\text{amplitud de salida}} = e^{-2G} \quad \text{with} \quad G = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m} \int [V(r) - E] dr$$

G es denominda como el *factor Gamow*.

2. decaimiento β . Aquí un protón cambia en un neutron o viceversa:
 $p^+ \rightarrow n^0 + W^+ \rightarrow n^0 + e^+ + \nu_e$, y $n^0 \rightarrow p^+ + W^- \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}_e$.
3. Captura de un electrón electrón: aquí, un proton en el núcleo captura un electrón (usualmente de la capa K del átomo).

4. Fisión espontánea: los compuestos del núcleo se separan en partes.
5. decaimiento γ : aquí el núcleo emite un foton altamente energético. El decaimiento constante es dado por

$$\lambda = \frac{P(l)}{\hbar\omega} \sim \frac{E_\gamma}{(\hbar c)^2} \left(\frac{E_\gamma R}{\hbar c} \right)^{2l} \sim 10^{-4l}$$

donde l es el número cuántico para el momento angular y P el poder radiativo. Usualmente el decaimiento constante de momentos multipolares eléctricos es mayor que los momentos multipolares magnéticos. La energía de el foton es $E_\gamma = E_i - E_f - T_R$, con $T_R = E_\gamma^2/2mc^2$ la energía de retroceso, que puede usualmente se despreciada. La paridad de la radiación emitida es $\Pi^l = \Pi^i \cdot \Pi^f$. Con I el número cuántico de momentos angulares del núcleo, $L = \hbar\sqrt{I(I+1)}$, utilizando la siguiente regla de selección: $|\vec{I}_i - \vec{I}_f| \leq \Delta l \leq |\vec{I}_i + \vec{I}_f|$.

14.4 Esparcimiento y reacciones nucleares

14.4.1 Modelo cinético

Si un haz con intensidad I alcanza un blanco con densidad n y longitud x (esparcimiento de Rutherford) el número de esparcimiento R por unidad de tiempo es igual a $R = Inx\sigma$. De esto se sigue que la intensidad del haz decrece como $-dI = In\sigma dx$. Esto resulta en $I = I_0 e^{-n\sigma x} = I_0 e^{-\mu x}$.

Porque $dR = R(\theta, \varphi)d\Omega/4\pi = Inxd\sigma$ se tiene: $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{R(\theta, \varphi)}{4\pi nxI}$

Si N particulas son esparcidas en un material con una densidad n se tiene: $\frac{\Delta N}{N} = n \frac{d\sigma}{d\Omega} \Delta\Omega \Delta x$

Para colision es de Coulomb obtenemos: $\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_C = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 \mu v_0^2} \frac{1}{\sin^4(\frac{1}{2}\theta)}$

14.4.2 Modelo mecánico cuántico para esparcimiento n-p

El estado inicial es un haz de neutrones moviéndose a lo largo del eje z con función de onda $\psi_{\text{init}} = e^{ikz}$ y densidad de corriente $J_{\text{init}} = v|\psi_{\text{init}}|^2 = v$. A distancias largas para el punto de esparcimiento se tiene aproximadamente una función de onda esférica $\psi_{\text{scat}} = f(\theta)e^{ikr}/r$ donde $f(\theta)$ es la *amplitud de esparcimiento*. La función de onda total es descrita por

$$\psi = \psi_{\text{in}} + \psi_{\text{scat}} = e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}$$

El flujo de partículas esparcidas es $v|\psi_{\text{scat}}|^2 = v|f(\theta)|^2 d\Omega$. De ésto se obtienen que $\sigma(\theta) = |f(\theta)|^2$. La función de onda de partículas entrantes pueden se expresadas como una suma de funciones de onda de momentos angulares:

$$\psi_{\text{init}} = e^{ikz} = \sum_l \psi_l$$

El parámetro de impacto se relación con el momento angular con $L = bp = b\hbar k$, así $bk \approx l$. A una muy pequeña energía solamente partículas con $l = 0$ son dispersadas, así

$$\psi = \psi'_0 + \sum_{l>0} \psi_l \quad \text{and} \quad \psi_0 = \frac{\sin(kr)}{kr}$$

Si el potencial es aproximadamente rectangular se obtiene: $\psi'_0 = C \frac{\sin(kr + \delta_0)}{kr}$

La sección efectiva es entonces $\sigma(\theta) = \frac{\sin^2(\delta_0)}{k^2}$ so $\sigma = \int \sigma(\theta) d\Omega = \frac{4\pi \sin^2(\delta_0)}{k^2}$

A una energía muy pequeña se obtiene: $\sin^2(\delta_0) = \frac{\hbar^2 k^2 / 2m}{W_0 + W}$

con W_0 la profundidad de una barrera de potencial. A altas energía se obtiene: $\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_l \sin^2(\delta_l)$

14.4.3 Conservación de la energía y momentum en reacciones nucleares

Si una partícula P_1 colisiona con una partícula P_2 que es en reposo w.r.t. el sistema del laboratorio y las otras partículas son creadas, así

$$P_1 + P_2 \rightarrow \sum_{k>2} P_k$$

La energía total Q ganada o requerida es descrita por $Q = (m_1 + m_2 - \sum_{k>2} m_k)c^2$.

La energía cinética mínima T de P_1 en el sistema del laboratorio para iniciar la reacción es

$$T = -Q \frac{m_1 + m_2 + \sum m_k}{2m_2}$$

Si $Q < 0$ existe una energía umbral.

14.5 Dosimetría de radiación

Cantidades radiométricas determinan la magnitud de la fuente de radiación. *Cantidades radiométricas* están relacionadas a la transferencia de energía entre la radiación y la materia. Los parámetros que describen la relación entre estos son denominados *parámetros de interacción*. La intensidad de un haz de partículas de una sustancia decrece de acuerdo con $I(s) = I_0 \exp(-\mu s)$. La desaceleración de una partícula *pesada* es descrita por la *ecuación de Bethe-Bloch*:

$$\frac{dE}{ds} \sim \frac{q^2}{v^2}$$

La *fluencia* es descrita por $\Phi = dN/dA$. El *flujo* es dado por $\phi = d\Phi/dt$. La pérdida de energía es definida por $\Psi = dW/dA$, y la densidad de flujo de energía: $\psi = d\Psi/dt$. El *coeficiente de absorción* es dado por $\mu = (dN/N)/dx$. El *coeficiente de absorción de masa* es μ/ρ .

La *dosis de radiación* X es la cantidad de carga producida por la radiación por unidad de masa, con unidades C/kg. Una unidad vieja es el Röntgen: 1Ro = $2.58 \cdot 10^{-4}$ C/kg. Con el coeficiente de energía-absorción μ_E obteniendo:

$$X = \frac{dQ}{dm} = \frac{e\mu_E}{W\rho} \Psi$$

donde W es la energía requerida para desunir una carga elemental.

La *dosis absorbida* D es dada por $D = dE_{\text{abs}}/dm$, con unidades Gy=J/kg. Una vieja unidad es el rad: 1 rad=0.01 Gy. El *tiempo de dosis* es definido como \dot{D} . Puede ser derivado que

$$D = \frac{\mu_E}{\rho} \Psi$$

El *Kerma* K es una cantidad de energía cinética producida por partículas secundarias que son producidas por la unidad de masa de un objeto irradiado.

El *equivalente de dosis* H es un peso promedio de la dosis absorbida por el tipo de radiación, donde por cada tipo de radiación los efectos en material biológico se emplea un factor de peso. Estos factores de peso son llamados factores de cualidad. Su unidad es Sv. $H = QD$. Si la absorción es no es distribuida equitativamente, los factores de peso w por órgano se necesitan emplear: $H = \sum w_k H_k$. Para algunos tipos de radiación tenemos:

Tipo de radiación	Q
Radiación Röntgen, gamma	1
β , electrones, mesones	1
Neutrones térmicos	3 to 5
Neutrones rápidos	10 to 20
Protones	10
α , productos de fisión	20

Chapter 15

Teoría de campo cuántica & Física de partículas

15.1 Operadores de creación y aniquilación

Un estado con muchas partículas puede ser descrito por un conjunto de números: $|n_1 n_2 n_3 \dots\rangle$. Donde el estado vacío es dado por $|000\dots\rangle$. Esto es una completa descripción porque las partículas son indistinguibles. Los estados ortonormales son:

$$\langle n_1 n_2 n_3 \dots | n'_1 n'_2 n'_3 \dots \rangle = \prod_{i=1}^{\infty} \delta_{n_i n'_i}$$

El vector de estado dependiente del tiempo es

$$\Psi(t) = \sum_{n_1 n_2 \dots} c_{n_1 n_2 \dots}(t) |n_1 n_2 \dots\rangle$$

Los coeficientes c pueden ser interpretados del siguiente modo: $|c_{n_1 n_2 \dots}|^2$ es la probabilidad para encontrar n_1 partículas con momentum \vec{k}_1 , n_2 partículas con momentum \vec{k}_2 , etc., y $\langle \Psi(t) | \Psi(t) \rangle = \sum |c_{n_i}(t)|^2 = 1$. La expansión de los estados en tiempo es descrita por la ecuación de Schrödinger

$$i \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = H |\Psi(t)\rangle$$

donde $H = H_0 + H_{\text{int}}$. H_0 es el hamiltoniano para partículas libres y permanece $|c_{n_i}(t)|^2$ constante, H_{int} es la interacción del hamiltoniano y puede aumentar o disminuir en c^2 a costa de los otros.

Todos los operadores que pueden cambiar el número de posición pueden ser expandidos en operadores a y a^\dagger . a es el operador de aniquilación y a^\dagger el operador de creación, y:

$$\begin{aligned} a(\vec{k}_i) |n_1 n_2 \dots n_i \dots\rangle &= \sqrt{n_i} |n_1 n_2 \dots n_i - 1 \dots\rangle \\ a^\dagger(\vec{k}_i) |n_1 n_2 \dots n_i \dots\rangle &= \sqrt{n_i + 1} |n_1 n_2 \dots n_i + 1 \dots\rangle \end{aligned}$$

Porque los estados son normalizados $a|0\rangle = 0$ y $a(\vec{k}_i) a^\dagger(\vec{k}_i) |n_i\rangle = n_i |n_i\rangle$. Así, aa^\dagger es el operador de posición. Las siguientes reglas de conmutación pueden ser obtenidas:

$$[a(\vec{k}_i), a(\vec{k}_j)] = 0 \quad , \quad [a^\dagger(\vec{k}_i), a^\dagger(\vec{k}_j)] = 0 \quad , \quad [a(\vec{k}_i), a^\dagger(\vec{k}_j)] = \delta_{ij}$$

De tal modo, para partículas sin espín se tiene: $H_0 = \sum_i a^\dagger(\vec{k}_i) a(\vec{k}_i) \hbar \omega_{k_i}$

15.2 Campos clásicos y cuánticos

Comenzando con un campo real $\Phi^\alpha(x)$ (campos complejos pueden ser separados en una parte real y una parte imaginaria), la *densidad de Lagrange* \mathcal{L} es una función de la posición $x = (\vec{x}, ict)$ a través de los campos: $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\Phi^\alpha(x), \partial_\nu \Phi^\alpha(x))$. El lagrangiano es dado por $L = \int \mathcal{L}(x) d^3x$. Utilizando el principio variacional $\delta I(\Omega) = 0$ y con la integral $I(\Omega) = \int \mathcal{L}(\Phi^\alpha, \partial_\nu \Phi^\alpha) d^4x$ la ecuación del campo puede ser derivada:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^\alpha} - \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \Phi^\alpha)} = 0$$

El *campo conjugado* es analogo al momentum en mecanica clasica; luego, se define como:

$$\Pi^\alpha(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}^\alpha}$$

Con esto, la densidad del hamiltoniano se convierte $\mathcal{H}(x) = \Pi^\alpha \dot{\Phi}^\alpha - \mathcal{L}(x)$.

La Cuantización de un campo clásico es analogo a la cuantización mecanica de una masa puntual: Las funciones de campo son consideradas como operadores obedeciendo ciertas reglas de conmutacion:

$$[\Phi^\alpha(\vec{x}), \Phi^\beta(\vec{x}')] = 0 \quad , \quad [\Pi^\alpha(\vec{x}), \Pi^\beta(\vec{x}')] = 0 \quad , \quad [\Phi^\alpha(\vec{x}), \Pi^\beta(\vec{x}')] = i\delta_{\alpha\beta}(\vec{x} - \vec{x}')$$

15.3 El marco de interacción

Algunas formulaciones equivalentes de la mecánica cuántica son posibles:

1. El marco de Schrödinger: estados dependientes del tiempo, operadores independientes del tiempo.
2. marco de Heisenberg: estados dependientes del tiempo, operadores dependientes del tiempo.
3. marco de interacción: estados dependientes del tiempo, operadores dependientes del tiempo.

El marco de interacción puede ser obtenido del marco de Schrödinger por medio de una transformación unitaria:

$$|\Phi(t)\rangle = e^{iH_0^S} |\Phi^S(t)\rangle \quad \text{and} \quad O(t) = e^{iH_0^S} O^S e^{-iH_0^S}$$

El índice ^S denota el punto de vista de Schrödinger. Del que obtenemos:

$$i \frac{d}{dt} |\Phi(t)\rangle = H_{\text{int}}(t) |\Phi(t)\rangle \quad \text{y} \quad i \frac{d}{dt} O(t) = [O(t), H_0]$$

15.4 campo escalar real en el marco de interacción

Es sencillo de encontrar que, con $M := m_0^2 c^2 / \hbar^2$, tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(x) = \Pi(x) \quad \text{and} \quad \frac{\partial}{\partial t} \Pi(x) = (\nabla^2 - M^2) \Phi(x)$$

Del que obtenemos que Φ obedece la ecuación de Klein-Gordon $(\square - M^2)\Phi = 0$. Con la definición $k_0^2 = \vec{k}^2 + M^2 := \omega_k^2$ y la notación $\vec{k} \cdot \vec{x} - ik_0 t := kx$ la solución general de esta ecuación es:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left(a(\vec{k}) e^{ikx} + a^\dagger(\vec{k}) e^{-ikx} \right) \quad , \quad \Pi(x) = \frac{i}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \sqrt{\frac{1}{2}\omega_k} \left(-a(\vec{k}) e^{ikx} + a^\dagger(\vec{k}) e^{-ikx} \right)$$

El campo de operaciones contenido en un volumen V , que es empleado como factor de normalización. Usualmente podemos tomar el limite $V \rightarrow \infty$.

En general se tiene que el término con e^{-ikx} , que es la parte de la frecuencia positiva, tambien es la parte de creacion. En contraste, la parte de la frecuencia negativa es la parte de aniquilacion.

el coeficiente debe ser conjugado hermitiano porque Φ es hermitiano. Porque Φ tiene sólo una componente que puede ser interpretada como un campo que describe una partícula con spin cero. Luego, por las reglas de conmutación obtenemos $[\Phi(x), \Phi(x')] = i\Delta(x - x')$ con

$$\Delta(y) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{\sin(ky)}{\omega_k} d^3k$$

$\Delta(y)$ es una función impar que es invariante para la transformación de Lorentz apropiada (no es el reflejo). Ésto es consistente con el resultado encontrado previamente $[\Phi(\vec{x}, t), \Phi(\vec{x}', t)] = 0$. En general,

obtenemos que $\Delta(y) = 0$ en el exterior del cono de luz. Así las ecuaciones obedecen el postulado de localidad.

La densidad de Lagrange es descrita por: $\mathcal{L}(\Phi, \partial_\nu \Phi) = -\frac{1}{2}(\partial_\nu \Phi \partial_\nu \Phi + m^2 \Phi^2)$. El operador de energía es:

$$H = \int \mathcal{H}(x) d^3x = \sum_{\vec{k}} \hbar \omega_k a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k})$$

15.5 Partículas cargadas de spin-0, conservación de la carga

(La densidad del lagrangiano de las partículas) El lagrangiano de la densidad de partículas spin-0 es: $\mathcal{L} = -(\partial_\nu \Phi \partial_\nu \Phi^* + M^2 \Phi \Phi^*)$.

El teorema de Noether conecta una simetría continua de \mathcal{L} y una ley de conservación aditiva. Suponiendo que $\mathcal{L}((\Phi^\alpha)', \partial_\nu(\Phi^\alpha)') = \mathcal{L}(\Phi^\alpha, \partial_\nu \Phi^\alpha)$ y existe una transformación continua entre Φ^α y $\Phi^{\alpha'}$ como $\Phi^{\alpha'} = \Phi^\alpha + \epsilon f^\alpha(\Phi)$. Se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \Phi^\alpha)} f^\alpha \right) = 0$$

Esta es una ecuación de continuidad \Rightarrow una ley de conservación. La cantidad conservada depende de la simetría. La densidad Lagrangiana anterior es invariante para el cambio de fase $\Phi \rightarrow \Phi e^{i\theta}$: una norma global de transformación. La cantidad conservada es la densidad de corriente $J_\mu(x) = -ie(\Phi \partial_\mu \Phi^* - \Phi^* \partial_\mu \Phi)$. Debido a que esta cantidad es cero para campos reales, un campo complejo debe describir partículas cargadas. Cuando este campo es cuantizado el campo de operadores es dado por

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left(a(\vec{k}) e^{ikx} + b^\dagger(\vec{k}) e^{-ikx} \right), \quad \Phi^\dagger(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left(a^\dagger(\vec{k}) e^{ikx} + b(\vec{k}) e^{-ikx} \right)$$

Donde el operador de energía es descrito como:

$$H = \sum_{\vec{k}} \hbar \omega_k \left(a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}) + b^\dagger(\vec{k}) b(\vec{k}) \right)$$

y el operador de carga es:

$$Q(t) = -i \int J_4(x) d^3x \Rightarrow Q = \sum_{\vec{k}} e \left(a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}) - b^\dagger(\vec{k}) b(\vec{k}) \right)$$

Del que llega a que $a^\dagger a := N_+(\vec{k})$ es un operador de número de ocupación para partículas con una carga positiva y $b^\dagger b := N_-(\vec{k})$ es un operador de número de ocupación para partículas con una carga negativa.

15.6 Funciones de campo para partículas de spin- $\frac{1}{2}$

Spin es definido el comportamiento de las soluciones de ψ de la ecuación de Dirac. Un campo *escalar* Φ tiene la propiedad que si obedece la ecuación de Klein-Gordon, el campo rotado $\tilde{\Phi}(x) := \Phi(\Lambda^{-1}x)$ también obedece. Λ denota las rotaciones cuatro-dimensionales: Las transformaciones de Lorentz propias. Estas pueden ser escritas como:

$$\tilde{\Phi}(x) = \Phi(x) e^{-i\vec{n} \cdot \vec{L}} \quad \text{with} \quad L_{\mu\nu} = -i\hbar \left(x_\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu} - x_\nu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right)$$

Para $\mu \leq 3, \nu \leq 3$ estas son rotaciones, for $\nu = 4, \mu \neq 4$ estas son transformaciones de Lorentz.

Un campo rotado $\tilde{\psi}$ obedece a la ecuación de Dirac si la siguiente condición se presenta: $\tilde{\psi}(x) = D(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x)$. Esto resulta en la condición $D^{-1}\gamma_\lambda D = \Lambda_{\lambda\mu}\gamma_\mu$. Encontramos: $D = e^{i\vec{n} \cdot \vec{S}}$ con $S_{\mu\nu} = -i\frac{1}{2}\hbar\gamma_\mu\gamma_\nu$. Entonces:

$$\tilde{\psi}(x) = e^{-i(S+L)}\psi(x) = e^{-iJ}\psi(x)$$

Entonces las soluciones a la ecuación de Dirac son dadas por:

$$\psi(x) = u_{\pm}^r(\vec{p})e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{x}\pm Et)}$$

Aquí, r es una indicación para la dirección del spin, y \pm es el signo de la energía. Con la notación $v^r(\vec{p}) = u_{-}^r(-\vec{p})$ y $u^r(\vec{p}) = u_{+}^r(\vec{p})$ podemos escribir para el producto interno de estos espinores:

$$u_{+}^r(\vec{p})u_{+}^{r'}(\vec{p}) = \frac{E}{M}\delta_{rr'} \quad , \quad u_{-}^r(\vec{p})u_{-}^{r'}(\vec{p}) = \frac{E}{M}\delta_{rr'} \quad , \quad u_{+}^r(\vec{p})u_{-}^{r'}(\vec{p}) = 0$$

Porque del factor E/M esto no es invariante relativista. Un producto interno Lorentz-invariante es definido por $\bar{a}b := a^{\dagger}\gamma_4 b$, donde $\bar{a} := a^{\dagger}\gamma_4$ es una fila de espinores. De donde se obtiene:

$$\overline{u^r(\vec{p})}u^{r'}(\vec{p}) = \delta_{rr'} \quad , \quad \overline{v^r(\vec{p})}v^{r'}(\vec{p}) = -\delta_{rr'} \quad , \quad \overline{u^r(\vec{p})}v^{r'}(\vec{p}) = 0$$

Combinaciones del tipo $a\bar{a}$ resultan en una matriz de 4×4 :

$$\sum_{r=1}^2 u^r(\vec{p})\overline{u^r(\vec{p})} = \frac{-i\gamma_{\lambda}p_{\lambda} + M}{2M} \quad , \quad \sum_{r=1}^2 v^r(\vec{p})\overline{v^r(\vec{p})} = \frac{-i\gamma_{\lambda}p_{\lambda} - M}{2M}$$

La densidad lagrangiana que resulta de la ecuación de Dirac y contando con la energía de normalización correcta es:

$$\mathcal{L}(x) = -\overline{\psi(x)}\left(\gamma_{\mu}\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} + M\right)\psi(x)$$

y la densidad de corriente es $J_{\mu}(x) = -ie\overline{\psi}\gamma_{\mu}\psi$.

15.7 Cuantización de campos de spin- $\frac{1}{2}$

La solución general para los operadores de campo es en este caso:

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{M}{V}} \sum_{\vec{p}} \frac{1}{\sqrt{E}} \sum_r (c_r(\vec{p})u^r(\vec{p})e^{ipx} + d_r^{\dagger}(\vec{p})v^r(\vec{p})e^{-ipx})$$

y

$$\overline{\psi(x)} = \sqrt{\frac{M}{V}} \sum_{\vec{p}} \frac{1}{\sqrt{E}} \sum_r (c_r^{\dagger}(\vec{p})\overline{u^r(\vec{p})}e^{-ipx} + d_r(\vec{p})\overline{v^r(\vec{p})}e^{ipx})$$

Aquí, c^{\dagger} y c son los operadores de creación y aniquilación, respectivamente, los operadores para la creación de electrones d^{\dagger} y d de aniquilación de positrones. El operador de energía es dado por

$$H = \sum_{\vec{p}} E_{\vec{p}} \sum_{r=1}^2 (c_r^{\dagger}(\vec{p})c_r(\vec{p}) - d_r(\vec{p})d_r^{\dagger}(\vec{p}))$$

Para prevenir que la energía de los positrones sea negativa los operadores deben obedecer las reglas de anti-conmutación, en lugar de las reglas de conmutación:

$$[c_r(\vec{p}), c_{r'}^{\dagger}(\vec{p})]_{+} = [d_r(\vec{p}), d_{r'}^{\dagger}(\vec{p})]_{+} = \delta_{rr'}\delta_{pp'} \quad , \quad \text{para todos los anti conmutadores que son 0.}$$

Los operadores de campo obedecen

$$[\psi_{\alpha}(x), \psi_{\beta}(x')] = 0 \quad , \quad [\overline{\psi_{\alpha}(x)}, \overline{\psi_{\beta}(x')}] = 0 \quad , \quad [\psi_{\alpha}(x), \overline{\psi_{\beta}(x')}]_{+} = -iS_{\alpha\beta}(x - x')$$

$$\text{con } S(x) = \left(\gamma_{\lambda}\frac{\partial}{\partial x_{\lambda}} - M\right)\Delta(x)$$

Las reglas de anti-conmutación dan además la energía positiva definida también el principio de exclusión de Pauli y la estadística de Fermi-Dirac: porque $c_r^{\dagger}(\vec{p})c_r^{\dagger}(\vec{p}) = c_r^{\dagger}(\vec{p})c_r^{\dagger}(\vec{p})$ obtenindose:

$\{c_r^\dagger(p)\}^2 = 0$. Afirmando la imposibilidad de la creación de dos electrones con el mismo momento y spin. Este es el principio de exclusión. Otro modo de observar este hecho es que $\{N_r^+(\vec{p})\}^2 = N_r^+(\vec{p})$: los operadores de ocupación tienen solamente valores propios de 0 y 1.

Para evitar las contribuciones del vacío infinito a la energía y la carga el *producto normal* es introducido. Las expresiones para la densidad de corriente ahora es $J_\mu = -ieN(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)$. Este producto es obtenido por:

- Expandiendo todos los campos de los operadores de creación y aniquilación,
- Manteniendo todos los términos que no tienen operadores de aniquilación, o en que están del lado derecho de los operadores de creación,
- En todos los demás términos se debe intercambiar los factores de modo que los operadores de aniquilación estén del lado derecho. Por un intercambio de dos operadores de fermiones y adicionado un signo negativo, no por intercambio de dos operadores de bosones. Asumiendo en adelante que todos los conmutadores son cero.

15.8 Cuantización del campo electromagnético

Comenzando con la densidad de Lagrange $\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}$

se sigue que para los operadores de campo $A(x)$:

$$A(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \sum_{m=1}^4 \left(a_m(\vec{k}) \epsilon^m(\vec{k}) e^{ikx} + a^\dagger(\vec{k}) \epsilon^m(\vec{k})^* e^{-ikx} \right)$$

Los operadores obedecen $[a_m(\vec{k}), a_{m'}^\dagger(\vec{k})] = \delta_{mm'} \delta_{kk'}$. Todos los demás conmutadores son 0. m dados por la dirección de polarización del fotón: $m = 1, 2$ dando polarización transversal, $m = 3$ polarización longitudinal y $m = 4$ Fotones polarizados temporalmente. Obteniéndose:

$$[A_\mu(x), A_\nu(x')] = i\delta_{\mu\nu} D(x - x') \quad \text{with} \quad D(y) = \Delta(y)|_{m=0}$$

A pesar del hecho que $A_4 = iV$ es imaginario en el caso clásico, A_4 es todavía definido como hermitiano, porque de otro modo el signo de la energía es incorrecto. Al cambiar la definición de el producto interno es la configuración del espacio los valores de expectación para $A_{1,2,3}(x) \in \mathbb{R}$ y para $A_4(x)$ son imaginarios.

Si los potenciales satisfacen la condición de norma de Lorentz $\partial_\mu A_\mu = 0$ los operadores E y B derivados de estos potenciales cumplirán con las ecuaciones de Maxwell. Sin embargo, se presentan problemas con las reglas de conmutación. Ahora, se demanda que solamente los estados permitidos por lo que se tiene

$$\frac{\partial A_\mu^+}{\partial x_\mu} |\Phi\rangle = 0$$

Esto resulta en:

$$\left\langle \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} \right\rangle = 0.$$

De esto resulta que $(a_3(\vec{k}) - a_4(\vec{k}))|\Phi\rangle = 0$. Con una transformación de norma local se puede obtener $N_3(\vec{k}) = 0$ y $N_4(\vec{k}) = 0$. Sin embargo, esto solamente a un campo EM libre: en estados intermedios en interacciones puede existir fonones longitudinales y temporales longitudinal. Estos fonones son responsables por el potencial de Coulomb estacionario.

15.9 Interacción de campos y la matriz S

La matriz de esparcimiento S (scattering) da una relación con el estado inicial y final de una interacción: $|\Phi(\infty)\rangle = S|\Phi(-\infty)\rangle$. Si la ecuación de Schrödinger es integrada:

$$|\Phi(t)\rangle = |\Phi(-\infty)\rangle - i \int_{-\infty}^t H_{\text{int}}(t_1) |\Phi(t_1)\rangle dt_1$$

Y la teoría de perturbaciones es aplicado se puede encontrar que:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int \cdots \int T \{ \mathcal{H}_{\text{int}}(x_1) \cdots \mathcal{H}_{\text{int}}(x_n) \} d^4x_1 \cdots d^4x_n \equiv \sum_{n=0}^{\infty} S^{(n)}$$

Aquí, el operador T significa un *producto ordenado temporal*: los términos en tal clase de productos debe ser ordenado en incrementos de tiempo de derecha a izquierda de modo que el término más novel actuó primero. La matriz S es descrita por: $S_{ij} = \langle \Phi_i | S | \Phi_j \rangle = \langle \Phi_i | \Phi(\infty) \rangle$.

La densidad Hamiltoniana de interacción para las interacciones entre el campo electromagnético y el campo electrón-positrón es: $\mathcal{H}_{\text{int}}(x) = -J_{\mu}(x)A_{\mu}(x) = ieN(\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi A_{\mu})$

Cuando es expandido como: $\mathcal{H}_{\text{int}} = ieN \left((\bar{\psi}^+ + \bar{\psi}^-) \gamma_{\mu} (\psi^+ + \psi^-) (A_{\mu}^+ + A_{\mu}^-) \right)$

ocho términos aparecen. Cada término corresponde con un posible proceso. El término $ie\bar{\psi}^+ \gamma_{\mu} \psi^+ A_{\mu}^-$ actuando sobre $|\Phi\rangle$ da transiciones donde A_{μ}^- crea un fotón, ψ^+ aniquila un electrón y $\bar{\psi}^+$ aniquila un positrón. nicamente términos con el número correcto de partículas en el estado inicial y final contribuye a los elementos de la matriz $\langle \Phi_i | S | \Phi_j \rangle$. Posteriores factores en \mathcal{H}_{int} pueden crear y posteriormente aniquilar partículas: las *partículas virtuales*.

La expresión para $S^{(n)}$ contiene productos ordenados temporalmente de productos normales. Esto puede ser escrito como una suma de productos normales. Los operadores aparentes describen los cambios mínimos necesarios para cambiar el estado inicial en el estado final. Los efectos de las partículas virtuales son descritos por las funciones de (anti)conmutación. Algunos productos ordenados por tiempo son:

$$\begin{aligned} T \{ \Phi(x) \Phi(y) \} &= N \{ \Phi(x) \Phi(y) \} + \frac{1}{2} \Delta^F(x-y) \\ T \{ \psi_{\alpha}(x) \bar{\psi}_{\beta}(y) \} &= N \{ \psi_{\alpha}(x) \bar{\psi}_{\beta}(y) \} - \frac{1}{2} S_{\alpha\beta}^F(x-y) \\ T \{ A_{\mu}(x) A_{\nu}(y) \} &= N \{ A_{\mu}(x) A_{\nu}(y) \} + \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} D_{\mu\nu}^F(x-y) \end{aligned}$$

Here, $S^F(x) = (\gamma_{\mu} \partial_{\mu} - M) \Delta^F(x)$, $D^F(x) = \Delta^F(x)|_{m=0}$ and

$$\Delta^F(x) = \begin{cases} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{ikx}}{\omega_{\vec{k}}} d^3k & \text{if } x_0 > 0 \\ \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{-ikx}}{\omega_{\vec{k}}} d^3k & \text{if } x_0 < 0 \end{cases}$$

El término $\frac{1}{2} \Delta^F(x-y)$ es llamado la contracción de $\Phi(x)$ y $\Phi(y)$, y es el valor de expectación de los productos ordenados en el tiempo en estado vacío. El teorema de Wick da una expresión para los productos ordenados en el tiempo de un número arbitrario de operadores de campo. La representación gráfica de estos procesos son llamados *diagramas de Feynman*. En la representación x cada diagrama describe un número de procesos. Las funciones de contracciones pueden también ser escritas como:

$$\Delta^F(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-2i}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{ikx}}{k^2 + m^2 - i\epsilon} d^4k \quad \text{and} \quad S^F(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-2i}{(2\pi)^4} \int e^{ipx} \frac{i\gamma_{\mu} p_{\mu} - M}{p^2 + M^2 - i\epsilon} d^4p$$

En la expresiones para $S^{(2)}$ this gives rise to terms $\delta(p+k-p'-k')$. This means that energy and momentum is conserved. However, virtual particles do not obey the relation between energy and momentum.

15.10 Divergencias y renormailizacion

It turns out that higher orders contribute infinite terms because only the sum $p + k$ of the four-momentum of the virtual particles is fixed. An integration over one of them becomes ∞ . In the x -representation this can be understood because the product of two functions containing δ -like singularities is not well defined. This is solved by discounting all divergent diagrams in a renormalization of e and M . It is assumed that an electron, if there would not be an electromagnetical field, would have a mass M_0 and a charge e_0 unequal to the observed mass M and charge e . In the Hamilton and Lagrange density of the free electron-positron field appears M_0 . So this gives, with $M = M_0 + \Delta M$:

$$\mathcal{L}_{e-p}(x) = -\overline{\psi}(x)(\gamma_\mu \partial_\mu + M_0)\psi(x) = -\overline{\psi}(x)(\gamma_\mu \partial_\mu + M)\psi(x) + \Delta M \overline{\psi}(x)\psi(x)$$

and $\mathcal{H}_{\text{int}} = ieN(\overline{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu) - i\Delta eN(\overline{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu)$.

15.11 Classification of elementary particles

Elementary particles can be categorized as follows:

1. **Hadrons:** these exist of quarks and can be categorized in:

I. **Baryons:** these exist of 3 quarks or 3 antiquarks.

II. **Mesons:** these exist of one quark and one antiquark.

2. **Leptons:** $e^\pm, \mu^\pm, \tau^\pm, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau, \bar{\nu}_e, \bar{\nu}_\mu, \bar{\nu}_\tau$.

3. **Field quanta:** γ, W^\pm, Z^0 , gluons, gravitons (?).

An overview of particles and antiparticles is given in the following table:

Particle	spin (\hbar)	B	L	T	T_3	S	C	B*	charge (e)	m_0 (MeV)	antipart.
u	1/2	1/3	0	1/2	1/2	0	0	0	+2/3	5	\bar{u}
d	1/2	1/3	0	1/2	-1/2	0	0	0	-1/3	9	\bar{d}
s	1/2	1/3	0	0	0	-1	0	0	-1/3	175	\bar{s}
c	1/2	1/3	0	0	0	0	1	0	+2/3	1350	\bar{c}
b	1/2	1/3	0	0	0	0	0	-1	-1/3	4500	\bar{b}
t	1/2	1/3	0	0	0	0	0	0	+2/3	173000	\bar{t}
e^-	1/2	0	1	0	0	0	0	0	-1	0.511	e^+
μ^-	1/2	0	1	0	0	0	0	0	-1	105.658	μ^+
τ^-	1/2	0	1	0	0	0	0	0	-1	1777.1	τ^+
ν_e	1/2	0	1	0	0	0	0	0	0	0(?)	$\bar{\nu}_e$
ν_μ	1/2	0	1	0	0	0	0	0	0	0(?)	$\bar{\nu}_\mu$
ν_τ	1/2	0	1	0	0	0	0	0	0	0(?)	$\bar{\nu}_\tau$
γ	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	γ
gluon	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	gluon
W^+	1	0	0	0	0	0	0	0	+1	80220	W^-
Z	1	0	0	0	0	0	0	0	0	91187	Z
graviton	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	graviton

Here B is the baryon number and L the lepton number. It is found that there are three different lepton numbers, one for e , μ and τ , which are separately conserved. T is the isospin, with T_3 the projection of the isospin on the third axis, C the charmness, S the strangeness and B* the bottomness. The anti particles have quantum numbers with the opposite sign except for the total isospin T. The composition of (anti)quarks of the hadrons is given in the following table, together with their mass in MeV in their ground state:

π^0	$\frac{1}{2}\sqrt{2}(u\bar{u}+d\bar{d})$	134.9764	J/Ψ	$c\bar{c}$	3096.8	$\bar{\Sigma}^+$	$\bar{d} \bar{d} \bar{s}$	1197.436
π^+	$u\bar{d}$	139.56995	Υ	$b\bar{b}$	9460.37	Ξ^0	$u s s$	1314.9
π^-	$d\bar{u}$	139.56995	p^+	$u u d$	938.27231	Ξ^0	$\bar{u} \bar{s} \bar{s}$	1314.9
K^0	$s\bar{d}$	497.672	p^-	$\bar{u} \bar{u} \bar{d}$	938.27231	Ξ^-	$d s s$	1321.32
K^0	$d\bar{s}$	497.672	n^0	$u d d$	939.56563	Ξ^+	$\bar{d} \bar{s} \bar{s}$	1321.32
K^+	$u\bar{s}$	493.677	\bar{n}^0	$\bar{u} \bar{d} \bar{d}$	939.56563	Ω^-	$s s s$	1672.45
K^-	$s\bar{u}$	493.677	Λ	$u d s$	1115.684	Ω^+	$\bar{s} \bar{s} \bar{s}$	1672.45
D^+	$c\bar{d}$	1869.4	$\bar{\Lambda}$	$\bar{u} \bar{d} \bar{s}$	1115.684	Λ_c^+	$u d c$	2285.1
D^-	$d\bar{c}$	1869.4	Σ^+	$u u s$	1189.37	Δ_c^{2-}	$\bar{u} \bar{u} \bar{u}$	1232.0
D^0	$c\bar{u}$	1864.6	$\bar{\Sigma}^-$	$\bar{u} \bar{u} \bar{s}$	1189.37	Δ^{2+}	$u u u$	1232.0
D^0	$u\bar{c}$	1864.6	Σ^0	$u d s$	1192.55	Δ^+	$u u d$	1232.0
F^+	$c\bar{s}$	1969.0	Σ^0	$\bar{u} \bar{d} \bar{s}$	1192.55	Δ^0	$u d d$	1232.0
F^-	$s\bar{c}$	1969.0	Σ^-	$d d s$	1197.436	Δ^-	$d d d$	1232.0

Each quark can exist in two spin states. So mesons are bosons with spin 0 or 1 in their ground state, while baryons are fermions with spin $\frac{1}{2}$ or $\frac{3}{2}$. There exist excited states with higher internal L . Neutrino's have a helicity of $-\frac{1}{2}$ while antineutrino's have only $+\frac{1}{2}$ as possible value.

The quantum numbers are subject to conservation laws. These can be derived from symmetries in the Lagrange density: continuous symmetries give rise to additive conservation laws, discrete symmetries result in multiplicative conservation laws.

Leyes de conservacion geometricas son invariantes ante las trasformaciones de Lorentz y la operacion CPT. Las que son:

1. Masa/energia, porque las leyes de la naturaleza son invariantes para las traslaciones en el tiempo.
2. Momentum, porque las leyes de la naturaleza son invariantes ante para traslaciones en el espacio.
3. Momentum angular, porque las leyes de la naturaleza son invariantes ante rotaciones.

Leyes de conservacion dinamicas son invariantes ante la operacion CPT. Las que son:

1. La carga electrica, porque las ecuaciones de Maxwell son invariantes ante trasformaciones de norma.
2. La carga de color se conserva.
3. El Isospin, porque QCD es invariante ante rotaciones en el espacio T.
4. El numero de bariones y leptones se conserva perno ante un simetria SU(5) de las leyes de la naturaleza.
5. Algunos tipos de quarks sono se conservan ante la interacion de colores.
6. Paridad se conserva excepto para interacciones debiles.

Las particulas elementales puede ser clasificadas en tres familias:

	leptones	quarks	antileptones	antiquarks
1st generacion	e^- ν_e	d u	e^+ $\bar{\nu}_e$	\bar{d} \bar{u}
2nd generacion	μ^- ν_μ	s c	μ^+ $\bar{\nu}_\mu$	\bar{s} \bar{c}
3rd generacion	τ^- ν_τ	b t	τ^+ $\bar{\nu}_\tau$	\bar{b} \bar{t}

Los quarks existen en tres colores, pero porque ellos estan *confinedos* estos colores no pueden ser detectados directamente. La fuerza de color no hace decrementos con en la distancia. La energia potencial puede ser lo suficientemente intensa para crear un par quark-antiquark cuando esta trata de disjoin un (anti)quark de un hadron. Lo que resulta en dos hadrones y no en un quark libre.

15.12 violacion P y violacion CP

It is found that the weak interaction violates P-symmetry, and even CP-symmetry is not conserved. Some processes which violate P symmetry but conserve the combination CP are:

1. μ -decay: $\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$. Left-handed electrons appear more than $1000\times$ as much as right-handed ones.
2. β -decay of spin-polarized ^{60}Co : $^{60}\text{Co} \rightarrow ^{60}\text{Ni} + e^- + \bar{\nu}_e$. More electrons with a spin parallel to the Co than with a spin antiparallel are created: $(\text{parallel}-\text{antiparallel})/(\text{total})=20\%$.
3. There is no connection with the neutrino: the decay of the Λ particle through: $\Lambda \rightarrow p^+ + \pi^-$ and $\Lambda \rightarrow n^0 + \pi^0$ has also these properties.

The CP-symmetry was found to be violated by the decay of neutral Kaons. These are the lowest possible states with a s-quark so they can decay only weakly. The following holds: $C|K^0\rangle = \eta|\bar{K}^0\rangle$ where η is a phase factor. Further holds $P|K^0\rangle = -|K^0\rangle$ because K^0 and \bar{K}^0 have an intrinsic parity of -1 . From this follows that K^0 and \bar{K}^0 are not eigenvalues of CP: $CP|K^0\rangle = |\bar{K}^0\rangle$. The linear combinations

$$|K_1^0\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle) \quad \text{and} \quad |K_2^0\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle)$$

are eigenstates of CP: $CP|K_1^0\rangle = +|K_1^0\rangle$ and $CP|K_2^0\rangle = -|K_2^0\rangle$. A base of K_1^0 and K_2^0 is practical while describing weak interactions. For colour interactions a base of K^0 and \bar{K}^0 is practical because then the number u—number \bar{u} is constant. The expansion postulate must be used for weak decays:

$$|K^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K_1^0\rangle + |K_2^0\rangle)$$

The probability to find a final state with $CP = -1$ is $\frac{1}{2}|\langle K_2^0|K^0\rangle|^2$, the probability of $CP = +1$ decay is $\frac{1}{2}|\langle K_1^0|K^0\rangle|^2$.

The relation between the mass eigenvalues of the quarks (unaccented) and the fields arising in the weak currents (accented) is $(u', c', t') = (u, c, t)$, and:

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_2 & \sin\theta_2 \\ 0 & -\sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & 0 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}$$

$\theta_1 \equiv \theta_C$ is the *Cabibbo angle*: $\sin(\theta_C) \approx 0.23 \pm 0.01$.

15.13 The standard model

When one wants to make the Lagrange density which describes a field invariant for local gauge transformations from a certain group, one has to perform the transformation

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \rightarrow \frac{D}{Dx_\mu} = \frac{\partial}{\partial x_\mu} - i\frac{g}{\hbar} L_k A_\mu^k$$

Here the L_k are the generators of the gauge group (the “charges”) and the A_μ^k are the gauge fields. g is the matching coupling constant. The Lagrange density for a scalar field becomes:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(D_\mu\Phi^* D^\mu\Phi + M^2\Phi^*\Phi) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}$$

and the field tensors are given by: $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gc_{lm}^a A_\mu^l A_\nu^m$.

15.13.1 The electroweak theory

The electroweak interaction arises from the necessity to keep the Lagrange density invariant for local gauge transformations of the group $SU(2) \otimes U(1)$. Right- and left-handed spin states are treated different because the weak interaction does not conserve parity. If a fifth Dirac matrix is defined by:

$$\gamma_5 := \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

the left- and right- handed solutions of the Dirac equation for neutrino's are given by:

$$\psi_L = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi \quad \text{and} \quad \psi_R = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi$$

It appears that neutrino's are always left-handed while antineutrino's are always right-handed. The *hypercharge* Y , for quarks given by $Y = B + S + C + B^* + T'$, is defined by:

$$Q = \frac{1}{2}Y + T_3$$

so $[Y, T_k] = 0$. The group $U(1)_Y \otimes SU(2)_T$ is taken as symmetry group for the electroweak interaction because the generators of this group commute. The multiplets are classified as follows:

	e_R^-	ν_{eL}	e_L^-	u_L	d_L'	u_R	d_R
T	0	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		0	0
T_3	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0
Y	-2		-1	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$

Now, 1 field $B_\mu(x)$ is connected with gauge group $U(1)$ and 3 gauge fields $\vec{A}_\mu(x)$ are connected with $SU(2)$. The total Lagrange density (minus the fieldterms) for the electron-fermion field now becomes:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{0,EW} = & -(\overline{\psi_{\nu e,L}}, \overline{\psi_{eL}})\gamma^\mu \left(\partial_\mu - i\frac{g}{\hbar}\vec{A}_\mu \cdot (\tfrac{1}{2}\vec{\sigma}) - \tfrac{1}{2}i\frac{g'}{\hbar}B_\mu \cdot (-1) \right) \begin{pmatrix} \psi_{\nu e,L} \\ \psi_{eL} \end{pmatrix} - \\ & \overline{\psi_{eR}}\gamma^\mu \left(\partial_\mu - \tfrac{1}{2}i\frac{g'}{\hbar}(-2)B_\mu \right) \psi_{eR} \end{aligned}$$

Here, $\frac{1}{2}\vec{\sigma}$ are the generators of T and -1 and -2 the generators of Y .

15.13.2 Spontaneous symmetry breaking: the Higgs mechanism

All leptons are massless in the equations above. Their mass is probably generated by *spontaneous symmetry breaking*. This means that the dynamic equations which describe the system have a symmetry which the ground state does not have. It is assumed that there exists an isospin-doublet of scalar fields Φ with electrical charges $+1$ and 0 and potential $V(\Phi) = -\mu^2\Phi^*\Phi + \lambda(\Phi^*\Phi)^2$. Their antiparticles have charges -1 and 0 . The extra terms in \mathcal{L} arising from these fields, $\mathcal{L}_H = (D_{L\mu}\Phi)^*(D_{L\mu}^\mu\Phi) - V(\Phi)$, are globally $U(1) \otimes SU(2)$ symmetric. Hence the state with the lowest energy corresponds with the state $\Phi^*(x)\Phi(x) = v = \mu^2/2\lambda = \text{constant}$. The field can be written (were ω^\pm and z are Nambu-Goldstone bosons which can be transformed away, and $m_\phi = \mu\sqrt{2}$) as:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi^+ \\ \Phi^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\omega^+ \\ (v + \phi - iz)/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \langle 0|\Phi|0 \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Because this expectation value $\neq 0$ the $SU(2)$ symmetry is broken but the $U(1)$ symmetry is not. When the gauge fields in the resulting Lagrange density are separated one obtains:

$$W_\mu^- = \frac{1}{2}\sqrt{2}(A_\mu^1 + iA_\mu^2) \quad , \quad W_\mu^+ = \frac{1}{2}\sqrt{2}(A_\mu^1 - iA_\mu^2)$$

$$\begin{aligned}
Z_\mu &= \frac{gA_\mu^3 - g'B_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \equiv A_\mu^3 \cos(\theta_W) - B_\mu \sin(\theta_W) \\
A_\mu &= \frac{g'A_\mu^3 + gB_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \equiv A_\mu^3 \sin(\theta_W) + B_\mu \cos(\theta_W)
\end{aligned}$$

where θ_W is called the *Weinberg angle*. For this angle holds: $\sin^2(\theta_W) = 0.255 \pm 0.010$. Relations for the masses of the field quanta can be obtained from the remaining terms: $M_W = \frac{1}{2}vg$ and $M_Z = \frac{1}{2}v\sqrt{g^2 + g'^2}$, and for the elementary charge holds: $e = \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = g' \cos(\theta_W) = g \sin(\theta_W)$

Experimentally it is found that $M_W = 80.022 \pm 0.26 \text{ GeV}/c^2$ and $M_Z = 91.187 \pm 0.007 \text{ GeV}/c^2$. According to the weak theory this should be: $M_W = 83.0 \pm 0.24 \text{ GeV}/c^2$ and $M_Z = 93.8 \pm 2.0 \text{ GeV}/c^2$.

15.13.3 Quantumchromodynamics

Coloured particles interact because the Lagrange density is invariant for the transformations of the group $SU(3)$ of the colour interaction. A distinction can be made between two types of particles:

1. “White” particles: they have no colour charge, the generator $\vec{T} = 0$.
2. “Coloured” particles: the generators \vec{T} are $8 \times 3 \times 3$ matrices. There exist three colours and three anticolours.

The Lagrange density for coloured particles is given by

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = i \sum_k \bar{\Psi}_k \gamma^\mu D_\mu \Psi_k + \sum_{k,l} \bar{\Psi}_k M_{kl} \Psi_l - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}$$

The gluons remain massless because this Lagrange density does not contain spinless particles. Because left- and right- handed quarks now belong to the same multiplet a mass term can be introduced. This term can be brought in the form $M_{kl} = m_k \delta_{kl}$.

15.14 Path integrals

The development in time of a quantum mechanical system can, besides with Schrödingers equation, also be described by a *path integral* (Feynman):

$$\psi(x', t') = \int F(x', t', x, t) \psi(x, t) dx$$

in which $F(x', t', x, t)$ is the amplitude of probability to find a system on time t' in x' if it was in x on time t . Then,

$$F(x', t', x, t) = \int \exp\left(\frac{iS[x]}{\hbar}\right) d[x]$$

where $S[x]$ is an action-integral: $S[x] = \int L(x, \dot{x}, t) dt$. The notation $d[x]$ means that the integral has to be taken over all possible paths $[x]$:

$$\int d[x] := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \prod_n \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dx(t_n) \right\}$$

in which N is a normalization constant. To each path is assigned a probability amplitude $\exp(iS/\hbar)$. The classical limit can be found by taking $\delta S = 0$: the average of the exponent vanishes, except where it is stationary. In quantum fieldtheory, the probability of the transition of a fieldoperator $\Phi(\vec{x}, -\infty)$ to $\Phi'(\vec{x}, \infty)$ is given by

$$F(\Phi'(\vec{x}, \infty), \Phi(\vec{x}, -\infty)) = \int \exp\left(\frac{iS[\Phi]}{\hbar}\right) d[\Phi]$$

with the action-integral

$$S[\Phi] = \int_{\Omega} \mathcal{L}(\Phi, \partial_{\nu}\Phi) d^4x$$

15.15 Unificación y gravedad cuántica

La intensidad de la fuerza varia con la energía y las constantes de acoplamiento reciproco. El modelo SU(5) predice unificación completa de las fuerzas electromaneticas, debi y colores a una energia de 10^{15}GeV . Tambien predice 12 bosones X extra que se acoplan a los leptones y quarks son responsables del decaimiento del proton, con canal dominante $p^+ \rightarrow \pi^0 + e^+$, con un tiempo de vida promedio del proton de 10^{31} años. Este modelo no ha sido probado experimentalmente.

Modelos de supersimetria asumen un simetría entre bosonos y fermiones y predice patrones para las particulas conocidas con un spin que difiere de $\frac{1}{2}$. La modelo supersimetrico SU(5) predice unificación a 10^{16}GeV y un tiempo de vida promedia del proton de 10^{33} años. Los canales de decaimiento principales en la teoria son $p^+ \rightarrow K^+ + \bar{\nu}_{\mu}$ y $p^+ \rightarrow K^0 + \mu^+$.

La gravedad cuántica sólo tiene un rolen la interacción de partículas en tamaños de Planck, donde $\lambda_C \approx R_S$: $m_{\text{Pl}} = \sqrt{\hbar c/G} = 3 \cdot 10^{19} \text{ GeV}$, $t_{\text{Pl}} = \hbar/m_{\text{Pl}}c^2 = \sqrt{\hbar G/c^5} = 10^{-43}$ segundos y $r_{\text{Pl}} = ct_{\text{Pl}} \approx 10^{-35} \text{ m}$.

Chapter 16

Astrophysics

16.1 Determination of distances

The *parallax* is mostly used to determine distances in nearby space. The parallax is the angular difference between two measurements of the position of the object from different view-points. If the annual parallax is given by p , the distance R of the object is given by $R = a/\sin(p)$, in which a is the radius of the Earth's orbit. The *clusterparallax* is used to determine the distance of a group of stars by using their motion w.r.t. a fixed background. The tangential velocity v_t and the radial velocity v_r of the stars along the sky are given by

$$v_r = V \cos(\theta) \quad , \quad v_t = V \sin(\theta) = \omega R$$

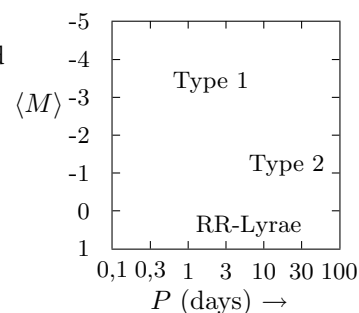
where θ is the angle between the star and the *point of convergence* and \hat{R} the distance in pc. This results, with $v_t = v_r \tan(\theta)$, in:

$$R = \frac{v_r \tan(\theta)}{\omega} \Rightarrow \hat{R} = \frac{1''}{p}$$

where p is the parallax in arc seconds. The parallax is then given by

$$p = \frac{4.74\mu}{v_r \tan(\theta)}$$

with μ de proper motion of the star in $''/\text{yr}$. A method to determine the distance of objects which are somewhat further away, like galaxies and star clusters, uses the period-Brightness relation for Cepheids. This relation is shown in the above figure for different types of stars.



16.2 Brightness and magnitudes

The *brightness* is the total radiated energy per unit of time. Earth receives $s_0 = 1.374 \text{ kW/m}^2$ from the Sun. Hence, the brightness of the Sun is given by $L_\odot = 4\pi r^2 s_0 = 3.82 \cdot 10^{26} \text{ W}$. It is also given by:

$$L_\odot = 4\pi R_\odot^2 \int_0^\infty \pi F_\nu d\nu$$

where πF_ν is the monochromatic radiation flux. At the position of an observer this is πf_ν , with $f_\nu = (R/r)^2 F_\nu$ if absorption is ignored. If A_ν is the fraction of the flux which reaches Earth's surface, the transmission factor is given by R_ν and the surface of the detector is given by πa^2 , then the apparent brightness b is given by:

$$b = \pi a^2 \int_0^\infty f_\nu A_\nu R_\nu d\nu$$

The *magnitude* m is defined by:

$$\frac{b_1}{b_2} = (100)^{\frac{1}{5}(m_2 - m_1)} = (2.512)^{m_2 - m_1}$$

because the human eye perceives lightintensities logarithmical. From this follows that $m_2 - m_1 = 2.5 \cdot^{.10} \log(b_1/b_2)$, or: $m = -2.5 \cdot^{.10} \log(b) + C$. The apparent brightness of a star if this star would be at a distance of 10 pc is called the *absolute brightness* B : $B/b = (\hat{r}/10)^2$. The absolute magnitude is then given by $M = -2.5 \cdot^{.10} \log(B) + C$, or: $M = 5 + m - 5 \cdot^{.10} \log(\hat{r})$. When an interstellar absorption of $10^{-4}/\text{pc}$ is taken into account one finds:

$$M = (m - 4 \cdot 10^{-4} \hat{r}) + 5 - 5 \cdot^{.10} \log(\hat{r})$$

If a detector detects all radiation emitted by a source one would measure the *absolute bolometric magnitude*. If the *bolometric correction* BC is given by

$$BC = 2.5 \cdot^{.10} \log \left(\frac{\text{Energy flux received}}{\text{Energy flux detected}} \right) = 2.5 \cdot^{.10} \log \left(\frac{\int f_\nu d\nu}{\int f_\nu A_\nu R_\nu d\nu} \right)$$

holds: $M_b = M_V - BC$ where M_V is the visual magnitude. Further holds

$$M_b = -2.5 \cdot^{.10} \log \left(\frac{L}{L_\odot} \right) + 4.72$$

16.3 Radiation and stellar atmospheres

The radiation energy passing through a surface dA is $dE = I_\nu(\theta, \varphi) \cos(\theta) d\nu d\Omega dA dt$, where I_ν is the *monochromatical intensity* [$\text{Wm}^{-2}\text{sr}^{-1}\text{Hz}^{-1}$]. When there is no absorption the quantity I_ν is independent of the distance to the source. Planck's law holds for a black body:

$$I_\nu(T) \equiv B_\nu(T) = \frac{c}{4\pi} w_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1}$$

The radiation transport through a layer can then be written as:

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -I_\nu \kappa_\nu + j_\nu$$

Here, j_ν is the *coefficient of emission* and κ_ν the *coefficient of absorption*. $\int ds$ is the thickness of the layer. The *optical thickness* τ_ν of the layer is given by $\tau_\nu = \int \kappa_\nu ds$. The layer is optically thin if $\tau_\nu \ll 1$, the layer is optically thick if $\tau_\nu \gg 1$. For a stellar atmosphere in LTE holds: $j_\nu = \kappa_\nu B_\nu(T)$. Then also holds:

$$I_\nu(s) = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + B_\nu(T)(1 - e^{-\tau_\nu})$$

16.4 Composition and evolution of stars

The structure of a star is described by the following equations:

$$\begin{aligned} \frac{dM(r)}{dr} &= 4\pi \varrho(r) r^2 \\ \frac{dp(r)}{dr} &= -\frac{GM(r)\varrho(r)}{r^2} \\ \frac{L(r)}{dr} &= 4\pi \varrho(r) \varepsilon(r) r^2 \\ \left(\frac{dT(r)}{dr} \right)_{\text{rad}} &= -\frac{3}{4} \frac{L(r)}{4\pi r^2} \frac{\kappa(r)}{4\sigma T^3(r)}, \quad (\text{Eddington}), \text{ or} \\ \left(\frac{dT(r)}{dr} \right)_{\text{conv}} &= \frac{T(r)}{p(r)} \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{dp(r)}{dr}, \quad (\text{convective energy transport}) \end{aligned}$$

Further, for stars of the solar type, the composing plasma can be described as an ideal gas:

$$p(r) = \frac{\varrho(r)kT(r)}{\mu m_H}$$

where μ is the average molecular mass, usually well approximated by:

$$\mu = \frac{\varrho}{nm_H} = \frac{1}{2X + \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}Z}$$

where X is the mass fraction of H, Y the mass fraction of He and Z the mass fraction of the other elements. Further holds:

$$\kappa(r) = f(\varrho(r), T(r), \text{composition}) \quad \text{and} \quad \varepsilon(r) = g(\varrho(r), T(r), \text{composition})$$

Convection will occur when the star meets the Schwarzschild criterium:

$$\left(\frac{dT}{dr}\right)_{\text{conv}} < \left(\frac{dT}{dr}\right)_{\text{rad}}$$

Otherwise the energy transfer takes place by radiation. For stars in quasi-hydrostatic equilibrium hold the approximations $r = \frac{1}{2}R$, $M(r) = \frac{1}{2}M$, $dM/dr = M/R$, $\kappa \sim \varrho$ and $\varepsilon \sim \varrho T^\mu$ (this last assumption is only valid for stars on the main sequence). For pp-chains holds $\mu \approx 5$ and for the CNO chains holds $\mu = 12$ tot 18. It can be derived that $L \sim M^3$: the *mass-brightness relation*. Further holds: $L \sim R^4 \sim T_{\text{eff}}^8$. This results in the equation for the main sequence in the Hertzsprung-Russel diagram:

$$^{10}\log(L) = 8 \cdot ^{10}\log(T_{\text{eff}}) + \text{constant}$$

16.5 Energy production in stars

The net reaction from which most stars gain their energy is: $4^1\text{H} \rightarrow ^4\text{He} + 2e^+ + 2\nu_e + \gamma$. This reaction produces 26.72 MeV. Two reaction chains are responsible for this reaction. The slowest, speed-limiting reaction is shown in boldface. The energy between brackets is the energy carried away by the neutrino.

1. The proton-proton chain can be divided into two subchains:

$^1\text{H} + \text{p}^+ \rightarrow ^2\text{D} + e^+ + \nu_e$, and then $^2\text{D} + \text{p} \rightarrow ^3\text{He} + \gamma$.

I. pp1: $^3\text{He} + ^3\text{He} \rightarrow 2\text{p}^+ + ^4\text{He}$. There is 26.21 + (0.51) MeV released.

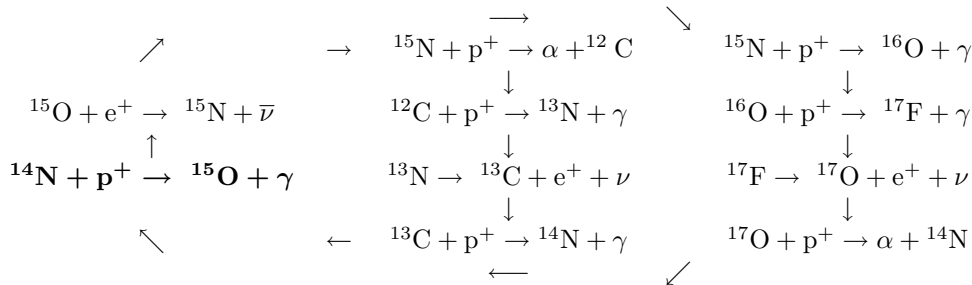
II. pp2: $^3\text{He} + \alpha \rightarrow ^7\text{Be} + \gamma$

i. $^7\text{Be} + e^- \rightarrow ^7\text{Li} + \nu$, then $^7\text{Li} + \text{p}^+ \rightarrow ^4\text{He} + \gamma$. 25.92 + (0.80) MeV.

ii. $^7\text{Be} + \text{p}^+ \rightarrow ^8\text{B} + \gamma$, then $^8\text{B} + e^+ \rightarrow ^4\text{He} + \bar{\nu}$. 19.5 + (7.2) MeV.

Both ^7Be chains become more important with raising T .

2. The CNO cycle. The first chain releases 25.03 + (1.69) MeV, the second 24.74 + (1.98) MeV. The reactions are shown below.



The ∇ -operator

In cartesian coordinates (x, y, z) holds:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} &= \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z, \quad \text{grad} f = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z \\ \text{div } \vec{a} = \vec{\nabla} \cdot \vec{a} &= \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}, \quad \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\ \text{rot } \vec{a} = \vec{\nabla} \times \vec{a} &= \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z\end{aligned}$$

In cylinder coordinates (r, φ, z) holds:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} &= \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z, \quad \text{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z \\ \text{div } \vec{a} &= \frac{\partial a_r}{\partial r} + \frac{a_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z}, \quad \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\ \text{rot } \vec{a} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\varphi + \left(\frac{\partial a_\varphi}{\partial r} + \frac{a_\varphi}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_z\end{aligned}$$

In spherical coordinates (r, θ, φ) holds:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} &= \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi \\ \text{grad} f &= \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi \\ \text{div } \vec{a} &= \frac{\partial a_r}{\partial r} + \frac{2a_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{a_\theta}{r \tan \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \\ \text{rot } \vec{a} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \theta} + \frac{a_\theta}{r \tan \theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial r} - \frac{a_\varphi}{r} \right) \vec{e}_\theta + \\ &\quad \left(\frac{\partial a_\theta}{\partial r} + \frac{a_\theta}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\varphi \\ \nabla^2 f &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \tan \theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}\end{aligned}$$

General orthonormal curvilinear coordinates (u, v, w) can be obtained from cartesian coordinates by the transformation $\vec{x} = \vec{x}(u, v, w)$. The unit vectors are then given by:

$$\vec{e}_u = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \vec{x}}{\partial u}, \quad \vec{e}_v = \frac{1}{h_2} \frac{\partial \vec{x}}{\partial v}, \quad \vec{e}_w = \frac{1}{h_3} \frac{\partial \vec{x}}{\partial w}$$

where the factors h_i set the norm to 1. Then holds:

$$\begin{aligned}\text{grad} f &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial u} \vec{e}_u + \frac{1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial v} \vec{e}_v + \frac{1}{h_3} \frac{\partial f}{\partial w} \vec{e}_w \\ \text{div } \vec{a} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial}{\partial u} (h_2 h_3 a_u) + \frac{\partial}{\partial v} (h_3 h_1 a_v) + \frac{\partial}{\partial w} (h_1 h_2 a_w) \right) \\ \text{rot } \vec{a} &= \frac{1}{h_2 h_3} \left(\frac{\partial (h_3 a_w)}{\partial v} - \frac{\partial (h_2 a_v)}{\partial w} \right) \vec{e}_u + \frac{1}{h_3 h_1} \left(\frac{\partial (h_1 a_u)}{\partial w} - \frac{\partial (h_3 a_w)}{\partial u} \right) \vec{e}_v + \\ &\quad \frac{1}{h_1 h_2} \left(\frac{\partial (h_2 a_v)}{\partial u} - \frac{\partial (h_1 a_u)}{\partial v} \right) \vec{e}_w \\ \nabla^2 f &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial f}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial f}{\partial w} \right) \right]\end{aligned}$$

The SI units

Basic units

Quantity	Unit	Sym.
Longitud	metre	m
Masa	kilogram	kg
Tiempo	second	s
Temperatura	kelvin	K
Corriente electrica	ampere	A
Intensidad luminosa	candela	cd
Cantidad de sustancia	mol	mol

Unidades Extra

angulo plano	radian	rad
angulo solido	sterradian	sr

Unidades derivadas

Quantity	Unit	Sym.	Derivation
Frecuencia	hertz	Hz	s^{-1}
Fuerza	newton	N	$kg \cdot m \cdot s^{-2}$
Presion	pascal	Pa	$N \cdot m^{-2}$
Energia	joule	J	$N \cdot m$
Potencia	watt	W	$J \cdot s^{-1}$
Carga	coulomb	C	$A \cdot s$
El. Potential	volt	V	$W \cdot A^{-1}$
El. Capacitance	farad	F	$C \cdot V^{-1}$
El. Resistance	ohm	Ω	$V \cdot A^{-1}$
El. Conductance	siemens	S	$A \cdot V^{-1}$
Mag. flux	weber	Wb	$V \cdot s$
Mag. flux density	tesla	T	$Wb \cdot m^{-2}$
Inductancia	henry	H	$Wb \cdot A^{-1}$
Luminous flux	lumen	lm	$cd \cdot sr$
Illuminance	lux	lx	$lm \cdot m^{-2}$
Activity	becquerel	Bq	s^{-1}
Absorbed dose	gray	Gy	$J \cdot kg^{-1}$
Dose equivalent	sievert	Sv	$J \cdot kg^{-1}$

Prefijos

yotta	Y	10^{24}	giga	G	10^9	deci	d	10^{-1}	pico	p	10^{-12}
zetta	Z	10^{21}	mega	M	10^6	centi	c	10^{-2}	femto	f	10^{-15}
exa	E	10^{18}	kilo	k	10^3	milli	m	10^{-3}	atto	a	10^{-18}
peta	P	10^{15}	hecto	h	10^2	micro	μ	10^{-6}	zepto	z	10^{-21}
tera	T	10^{12}	deca	da	10	nano	n	10^{-9}	yocto	y	10^{-24}