

Capítulo 4

DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES

4.1. Autovalores y autovectores

Observemos que para una matriz cuadrada, por ejemplo $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, existen algunos vectores $x \in \mathbb{R}^2$ no nulos y números reales λ tales que $Ax = \lambda x$.

Así, si $x_1 = (1, 1)$,

$$Ax_1 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ es decir, } Ax_1 = 2x_1.$$

Para $x_1 = (1, -1)$ también se cumple que:

$$Ax_1 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow Ax_2 = 4x_2.$$

Estos vectores y los escalares correspondientes son característicos de la matriz y reciben el nombre de *vectores propios* o *autovectores*, y *valores propios* o *autovalores*. Nuestro objetivo es aprender a calcularlos, y deducir consecuencias de su existencia, pues surgen en multitud de aplicaciones: estudio de vibraciones, sistemas electricos, reacciones químicas, etc.

Definición 152 Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, el número real λ es un autovalor de A (o valor propio) si existe un vector $x \neq 0$, tal que $Ax = \lambda x$. Todo vector no nulo que satisfaga esta relación se denomina autovector de A (o vector propio) asociado al autovalor λ .

Observaciones:

a) La condición $x \neq 0$ se introduce para evitar el caso trivial: cualquier λ verifica la condición $A \cdot 0 = \lambda \cdot 0$.

b) Un autovector sólo está asociado a un autovalor: En efecto, si x es un autovector de A asociado a λ_1 y λ_2 , entonces: $Ax = \lambda_1 x = \lambda_2 x \underset{x \neq \mathbf{0}}{\Rightarrow} \lambda_1 = \lambda_2$.

c) Un autovalor tiene asociados infinitos autovectores.

Es decir, si x es un autovector correspondiente a λ también μx es un autovector correspondiente a λ . De hecho todos los vectores del subespacio $N(A - \lambda I)$, excepto el vector nulo, son autovectores correspondientes a λ .

Definición 153 Si λ es un autovalor de una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, el subespacio $N(A - \lambda I)$ se denomina subespacio propio de A asociado al autovalor λ , y se denota por $V_A(\lambda)$ o $V(\lambda)$.

Cálculo de los autovalores de A

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, para encontrar los autovalores de A debemos encontrar escalares λ tales que:

$$Ax = \lambda x \Rightarrow Ax - \lambda x = \mathbf{0} \Rightarrow (A - \lambda I)x = \mathbf{0}$$

Para que el sistema $(A - \lambda I)x = \mathbf{0}$ tenga soluciones no triviales ha de verificarse que $\det(A - \lambda I) = 0$.

El polinomio $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ recibe el nombre de *polinomio característico* de A , y sus raíces son los autovalores de A . $P_A(\lambda)$ es un polinomio de grado n , y por tanto A tiene a lo sumo n autovalores distintos.

Ejemplo 154 Calcular los autovalores de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 & -1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 4 & -4 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = 0 - (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$

de donde los autovalores de A son: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$.

Cálculo de los autovectores

Una vez obtenidos los autovalores de la matriz, para cada uno de ellos se obtienen los autovectores resolviendo el sistema $(A - \lambda I)x = 0$, pues $V(\lambda) = N(A - \lambda I) = \{x \in \mathbb{R}^n : (A - \lambda I)x = \mathbf{0}\}$.

Ejemplo 155 Calcular los subespacios propios de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$.

Como hemos visto anteriormente, los autovalores de A son: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$. Para cada uno de ellos vamos a calcular el correspondiente subespacio propio.

$$\boxed{\lambda_1 = 1} \quad V(1) = N(A - I) = \{x \in \mathbb{R}^n : (A - I)x = \mathbf{0}\}.$$

$$(A - I)x = \mathbf{0}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -4 & 4 \end{bmatrix} \underset{F_{12}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & -4 & 4 \end{bmatrix} \underset{F_{31}(-4)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -x_3 \\ 2x_2 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{x_3}{2} \\ x_2 = \frac{x_3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{\alpha}{2} \\ x_2 = \frac{\alpha}{2} \\ x_3 = \alpha \end{cases}$$

luego, $V(1) = L\left\{\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)\right\} = L\{(-1, 1, 2)\}$.

$$\boxed{\lambda_2 = 2} \quad V(2) = N(A - 2I) = \{x \in \mathbb{R}^n : (A - 2I)x = \mathbf{0}\}$$

$$(A - 2I)x = \mathbf{0}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & -4 & 3 \end{bmatrix} \underset{F_{21}(1)}{\underset{F_{31}(-4)}{\sim}} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix} \underset{F_{12}}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = x_3 \\ 4x_2 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{x_3}{2} \\ x_2 = \frac{x_3}{4} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x_1 = -\frac{\alpha}{2} \\ x_2 = \frac{\alpha}{4} \\ x_3 = \alpha \end{matrix}}$$

luego, $V(2) = L\{(\frac{-1}{2}, \frac{1}{4}, 1)\} = L\{(-2, 1, 4)\}$.

$$\boxed{\lambda_3 = 3} \quad V(3) = N(A - 3I) = \{x \in \mathbb{R}^n : (A - 3I)x = \mathbf{0}\}$$

$$(A - 3I)x = \mathbf{0}, \quad \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & -4 & 2 \end{bmatrix} \underset{F_{21}(\frac{1}{2})}{\underset{F_{31}(2)}{\sim}} \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = x_3 \\ -2x_2 = -\frac{1}{2}x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{x_3}{4} \\ x_2 = \frac{x_3}{4} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x_1 = -\frac{\alpha}{4} \\ x_2 = \frac{\alpha}{4} \\ x_3 = \alpha \end{matrix}}$$

luego, $V(3) = L\{(\frac{-1}{4}, \frac{1}{4}, 1)\} = L\{(-1, 1, 4)\}$.

Multiplicidad algebraica y geométrica

Definición 156 a) Se llama multiplicidad algebraica de un autovalor λ_0 al número de veces que aparece $\lambda - \lambda_0$ como factor en el polinomio característico de A .

b) Se llama multiplicidad geométrica de un autovalor λ_0 a la dimensión del subespacio propio $V(\lambda_0)$.

Nota 157 a) Recuérdese que $\dim V(\lambda_0) = \dim N(A - \lambda_0 I) = n - \text{rg}(A - \lambda_0 I)$.

b) Para un autovalor λ , la multiplicidad algebraica se denota por m ó $m_a(\lambda)$, y la geométrica se denota por μ ó $m_g(\lambda)$.

En el ejemplo 155 se verifica que $\mu = m = 1$ para los tres autovalores.

Para cada autovalor, el valor de la multiplicidad geométrica está acotado por el valor de la multiplicidad algebraica. Esta relación se incluye en el siguiente resultado que enunciamos sin demostración.

Proposición 158 Si λ es un autovalor de A , entonces $1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$.

Ejemplo 159 Calcular los autovalores y autovectores de $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 & 1 \\ 2 & 3 - \lambda & 2 \\ 3 & 3 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 15\lambda + 7 = 0$$

$$\lambda^3 - 9\lambda^2 + 15\lambda - 7 = (\lambda - 7)(\lambda - 1)^2 = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = 7 \quad m_1 = 1 \quad \mu_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1 \quad m_2 = 2 \end{array}$$

$$\boxed{\lambda_1 = 7} \quad V(7) = N(A - 7I) = \{x \in \mathbb{R}^n : (A - 7I)x = \mathbf{0}\}.$$

$$(A - I)x = \mathbf{0}, \quad \begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix} \underset{\substack{F_{21}(\frac{2}{5}) \\ F_{31}(\frac{3}{5})}}{\sim} \begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{18}{5} & \frac{12}{5} \\ 0 & \frac{18}{5} & -\frac{12}{5} \end{bmatrix} \underset{F_{32}(1)}{\sim} \begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{18}{5} & \frac{12}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -5x_1 + x_2 = -x_3 \\ -\frac{18}{5}x_2 = -\frac{12}{5}x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{x_3}{3} \\ x_2 = \frac{2x_3}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = \frac{\alpha}{3} \\ x_2 = \frac{2\alpha}{3} \\ x_3 = \alpha \end{array}$$

luego, $V(7) = L\{(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1)\} = L\{(1, 2, 3)\}$.

$$\boxed{\lambda_2 = 1} \quad V(1) = N(A - I) = \{x \in \mathbb{R}^n : (A - I)x = \mathbf{0}\}$$

$$(A - I)x = \mathbf{0}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \underset{\substack{F_{21}(-2) \\ F_{31}(-3)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = -x_2 - x_3 \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = -\alpha - \beta \\ x_2 = \beta \\ x_3 = \alpha \end{array}$$

luego, $V(1) = L\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\} \Rightarrow \mu_2 = 2$

Para esta matriz coinciden las multiplicidades algebraicas y geométricas de los autovalores.

$$\begin{array}{l} \lambda_1 = 7 \quad m_1 = 1 \quad \mu_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1 \quad m_2 = 2 \quad \mu_2 = 2 \end{array}$$

Proposición 160 Sea λ autovalor de A y $x \in V_A(\lambda)$, $x \neq \mathbf{0}$.

- a) $\alpha\lambda$ es un autovalor de αA y $x \in V_{\alpha A}(\alpha\lambda)$.
 b) λ^p es un autovalor de A^p y $x \in V_{A^p}(\lambda^p)$.
 c) A es singular, si y sólo si $\lambda = 0$ es un autovalor de A .
 d) Si A es regular, entonces $\lambda \neq 0$ y λ^{-1} es un autovalor de A^{-1} y $x \in V_{A^{-1}}(\lambda^{-1})$.

Demostración:

a) λ autovalor de A y $x \in V_A(\lambda)$, $x \neq \mathbf{0}$, entonces

$$Ax = \lambda x \Rightarrow \alpha Ax = \alpha \lambda x \Rightarrow (\alpha A)x = (\alpha \lambda)x$$

luego $\alpha\lambda$ es un autovalor de αA y $x \in V_{\alpha A}(\alpha\lambda)$.

b) Por inducción sobre p :

- Se verifica para $p = 2$:

$$A^2x = AAx = A(\lambda x) = \lambda(Ax) = \lambda(\lambda x) = \lambda^2x$$

luego λ^2 es un autovalor de A^2 y $x \in V_{A^2}(\lambda^2)$.

- Se supone cierto para $p - 1$, es decir λ^{p-1} es un autovalor de A^{p-1} y $x \in V_{A^{p-1}}(\lambda^{p-1})$.

- Veamos que se cumple para p .

$$\text{En efecto, } A^p x = AA^{p-1}x = A(\lambda^{p-1}x) = \lambda^{p-1}(Ax) = \lambda^{p-1}(\lambda x) = \lambda^p x.$$

luego λ^p es un autovalor de A^p y $x \in V_{A^p}(\lambda^p)$.

Por tanto, para todo p se cumple: λ^p es un autovalor de A^p y $x \in V_{A^p}(\lambda^p)$.

c) A es singular $\Leftrightarrow \det(A) = 0 \Leftrightarrow \det(A - 0I) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ es un autovalor de A .

d) Si A es regular, entonces sus autovalores son no nulos. Por tanto, si λ es un autovalor cualquiera de A , se verifica:

$$Ax = \lambda x \Rightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}\lambda x \Rightarrow x = \lambda A^{-1}x \Rightarrow A^{-1}x = \frac{1}{\lambda}x$$

Es decir, $\frac{1}{\lambda}$ es un autovalor de A^{-1} y $x \in V_{A^{-1}}(\frac{1}{\lambda})$.

Proposición 161 Si v_1, \dots, v_k son autovectores correspondientes a autovalores distintos $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, de una matriz A entonces $\{v_1, \dots, v_k\}$ es un conjunto linealmente independiente.

Demostración: Por reducción al absurdo.

Supongamos que $\{v_1, \dots, v_k\}$ es un conjunto l.d., entonces existirá algún vector que es combinación lineal de los demás, por ejemplo v_k . También supongamos que el conjunto $\{v_1, \dots, v_{k-1}\}$ es l.i., entonces:

$$v_k = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{k-1} v_{k-1} \quad (1)$$

$$Av_k = A(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{k-1} v_{k-1}) = \alpha_1 Av_1 + \dots + \alpha_{k-1} Av_{k-1}$$

$$\lambda_k v_k = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_{k-1} \lambda_{k-1} v_{k-1} \quad (2)$$

Por otro parte, multiplicando en (1) por λ_k resulta: $\lambda_k v_k = \lambda_k(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{k-1} v_{k-1})$

$$\lambda_k v_k = \alpha_1 \lambda_k v_1 + \dots + \alpha_{k-1} \lambda_k v_{k-1} \quad (3)$$

restando (2) y (3), se obtiene: $(\lambda_1 - \lambda_k)\alpha_1 v_1 + \dots + (\lambda_{k-1} - \lambda_k)\alpha_{k-1} v_{k-1} = 0$

y como $\{v_1, \dots, v_{k-1}\}$ es l.i se tiene que: $(\lambda_1 - \lambda_k)\alpha_1 = \dots = (\lambda_{k-1} - \lambda_k)\alpha_{k-1} = 0$

como $(\lambda_i - \lambda_k) \neq 0$, para $i = 1, \dots, k-1$, resulta: $\alpha_1 = \dots = \alpha_{k-1} = 0$ y por tanto $v_k = 0$, lo cual no es posible por ser v_k un vector propio. Por tanto, $\{v_1, \dots, v_k\}$ debe ser l.i. \square

Observación:

Si A tiene n autovalores distintos podemos obtener una base de \mathbb{R}^n formada por n autovectores $\{v_1, \dots, v_n\}$ tales que $v_i \in V(\lambda_i)$, $i = 1, \dots, n$.

Ejemplo 162 Consideremos de nuevo la matriz del ejemplo 155, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$.

Sabemos que tiene tres autovalores distintos: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 3$, y que sus subespacios propios son:

$$V(1) = L\{(-1, 1, 2)\}, V(2) = L\{(-2, 1, 4)\} \text{ y } V(3) = L\{(-1, 1, 4)\}.$$

Para obtener una base B de \mathbb{R}^3 formada por autovectores de A , basta unir las bases de los subespacios propios de A .

$$B = \{(-1, 1, 2), (-2, 1, 4), (-1, 1, 4)\}.$$

4.2. Diagonalización

Definición 163 *Dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ son semejantes si existe una matriz $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ regular tal que $B = P^{-1}AP$.*

Proposición 164 *Si A y B son dos matrices semejantes, con $B = P^{-1}AP$, entonces:*

- a) $P_A(\lambda) = P_B(\lambda)$.
- b) $\det(A) = \det(B)$.
- c) $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$.
- d) *Si $x \in V_A(\lambda), x \neq \mathbf{0}$, entonces $P^{-1}x \in V_B(\lambda)$.*

Demostración:

$$\begin{aligned} \text{a) } P_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \det(P^{-1}P) \det(A - \lambda I) = \det(P^{-1}) \det(A - \lambda I) \det(P) \\ &= \det(P^{-1}(A - \lambda I)P) = \det(P^{-1}AP - P^{-1}\lambda IP) = \det(B - \lambda I) = P_B(\lambda) \end{aligned}$$

$$\text{b) } \det(B) = \det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1}) \det(A) \det(P) = \det(P^{-1}P) \det(A) = \det(A).$$

c) Aunque no se ha justificado anteriormente, la expresión del polinomio característico de las matrices A y B puede expresarse del siguiente modo:

$$P_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \text{tr}(A) \lambda^{n-1} + \dots + \det(A)$$

$$P_B(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \text{tr}(B) \lambda^{n-1} + \dots + \det(B)$$

como $P_A(\lambda) = P_B(\lambda)$, se sigue que $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$.

$$\text{d) } B(P^{-1}x) = (P^{-1}AP)(P^{-1}x) = P^{-1}Ax = P^{-1}\lambda x = \lambda(P^{-1}x) \Rightarrow P^{-1}x \in V_B(\lambda). \quad \square$$

Ejemplo 165 Sean* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ y $P = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$.

Hallar la inversa de P y comprobar que las matrices A y D son semejantes y que tienen el mismo polinomio característico, la misma traza y el mismo determinante.

Mediante el método de Gauss-Jordan es fácil comprobar que $P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

* A es la matriz del ejemplo 155. Obsérvese que D es una matriz diagonal formada por los autovalores de A , y que P es una matriz regular construida disponiendo en columnas los vectores de la base B formada por autovectores de A .

Para probar que A y D son semejantes, basta verificar que $D = P^{-1}AP$.

$$D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

El polinomio característico de A es:

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 & -1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 4 & -4 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6.$$

El polinomio característico de D es:

$$P_D(\lambda) = \det(D - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(2 - \lambda)(3 - \lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6$$

Los determinantes y trazas de A y D son:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{vmatrix} = (0+4+8) - (-4+10) = 6 \quad \text{tr}(A) = 1+0+5 = 6$$

$$\det(D) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 \quad \text{tr}(D) = 1+2+3 = 6$$

Definición 166 Una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es diagonalizable si es semejante a una matriz diagonal.

Teorema 167 Una matriz A es diagonalizable sí y sólo si existe una base de \mathbb{R}^n formada por autovectores de A .

Demostración:

Sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de \mathbb{R}^n formada por n autovectores de A , con $v_i \in V(\lambda_i)$, siendo los autovalores λ_i iguales o distintos. Se verifica:

$$AP = A[v_1 | \dots | v_n] = [Av_1 | \dots | Av_n] = [\lambda_1 v_1 | \dots | \lambda_n v_n] = [v_1 | \dots | v_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} = PD$$

En consecuencia $D = P^{-1}AP$, siendo $P = [v_1 | \dots | v_n]$ una matriz regular pues sus columnas son l.i.al ser B una base.

El razonamiento recíproco es inmediato, pues si $D = P^{-1}AP$, entonces $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de \mathbb{R}^n formada por autovectores de A . \square

Ejemplo 168 La matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$ tiene tres autovalores distintos: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 3$. Los subespacios propios de A son:

$$V(1) = L\{(-1, 1, 2)\}, V(2) = L\{(-2, 1, 4)\} \text{ y } V(3) = L\{(-1, 1, 4)\}.$$

Uniendo las bases de estos subespacios se tiene una base de \mathbb{R}^3 formada por autovectores:

$$B = \{v_1, v_2, v_3\} \text{ siendo } v_1 = (-1, 1, 2), v_2 = (-2, 1, 4) \text{ y } v_3 = (-1, 1, 4).$$

La matriz de paso P se obtiene escribiendo por columnas los vectores de B .

$$P = [v_1 | v_2 | v_3] = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \text{ y se verifica que } D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Nota 169 Las columnas de P están determinadas según el orden en que escribamos los autovalores. Así, en el ejemplo anterior podríamos haber ordenado los autovalores de la siguiente manera:

$\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 1$. Para esta ordenación se tendría los siguientes subespacios:

$$V(\lambda_1) = V(3) = L\{(-1, 1, 4)\}, V(\lambda_2) = V(2) = L\{(-2, 1, 4)\} \text{ y } V(\lambda_3) = V(1) = L\{(-1, 1, 2)\}.$$

En consecuencia, la base B formada por autovectores de A , y las matrices D y P serían las siguientes:

$$B = \{(-1, 1, 4), (-2, 1, 4), (-1, 1, 2)\}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } P = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 170 Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ (ver ejemplo 159), sabemos que

$\det(A - \lambda I) = (\lambda - 7)(\lambda - 1)^2$ y que las multiplicidades algebraicas y geométricas de los autovalores son:

| | | |
|-----------------|-----------|-------------|
| $\lambda_1 = 7$ | $m_1 = 1$ | $\mu_1 = 1$ |
| $\lambda_2 = 1$ | $m_2 = 2$ | $\mu_2 = 2$ |

También hemos hallado los correspondientes subespacios propios:

$$V(7) = L\{(1, 2, 3)\}.$$

$$V(1) = L\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}.$$

Uniendo las bases de estos subespacios se tiene una base de \mathbb{R}^3 formada por autovectores:

$$B = \{v_1, v_2, v_3\} \text{ siendo } v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (-1, 1, 0) \text{ y } v_3 = (-1, 0, 1).$$

$$P = [v_1|v_2|v_3] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se verifica que:

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = D$$

El siguiente teorema, que enunciaremos sin hacer la demostración, nos establece un criterio para la diagonalización de matrices.

Teorema 171 Una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es diagonalizable si y sólo si posee n autovalores (iguales o distintos) y sus multiplicidades verifican las siguientes condiciones:

Proposición 172 a) $m_1 + \dots + m_p = n$.

b) $\mu_i = m_i$, para todo autovalor λ_i , $i = 1, \dots, p$.

Nota 173 Una matriz A con n autovalores distintos siempre verifica las dos condiciones anteriores.

Diagonalización Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, el procedimiento para obtener una base formada por autovectores es el siguiente:

1) Se calculan los autovalores de A , y ha de verificarse que:

$$m_1 + \dots + m_p = n. \text{ Es decir, ha de haber } n \text{ raíces de } P_A(\lambda).$$

$$\mu_i = m_i, \text{ para todo autovalor } \lambda_i, i = 1, \dots, p.$$

2) Para cada autovalor λ_i , $i = 1, \dots, p$, se determina una base de cada subespacio propio $V(\lambda_i)$.

3) Se obtiene la base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ uniendo las bases de los subespacios propios de A .

Una vez obtenida la base B , disponiendo las componentes de sus vectores por columnas se obtiene la matriz de paso P . La matriz diagonal viene determinada por los autovalores, escritos en el mismo orden que los vectores correspondientes de la base B . Es decir,

$$P = [v_1 | \dots | v_n] \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Ejemplo 174 Una matriz A de orden dos verifica las siguientes condiciones:

a) $A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

b) $v = (2, -1)$ es un autovector de A asociado al autovalor $\lambda = -2$.

Hallar la matriz A indicando si es diagonalizable o no. En caso afirmativo, diagonalizarla dando una matriz de paso.

Sabemos que $A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $A \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}$

por ser $\lambda = -2$ un autovalor asociado a $v = (2, -1)$.

Agrupando ambos productos: $A \left[\begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{array} \right]$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Los autovalores de A son:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -7 - \lambda & -10 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 7\lambda + \lambda^2 + 10 = (\lambda + 5)(\lambda + 2) = 0$$

$$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -5.$$

A tiene dos autovalores distintos y por tanto es diagonalizable.

Los subespacios propios de A son: $V(-2) = L\{(2, -1)\}$ y $V(-5) = N(A + 5I)$

$$(A + 5I)x = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & -10 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = -5x_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -5\alpha \\ x_2 = \alpha \end{cases}$$

de donde: $V(-5) = L\{(-5, 1)\}$

$B = \{(2, -1), (-5, 1)\}$ es una base formada por autovectores.

$P = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ es una matriz de paso, y $D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$ es una matriz diagonal semejante a A .

Ejemplo 175 ¿Para qué valores de α y β es diagonalizable la matriz A ?

$$A = \begin{bmatrix} 2\alpha - \beta & 0 & 2\alpha - 2\beta \\ 1 & \alpha & 2 \\ -\alpha + \beta & 0 & -\alpha + 2\beta \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 2\alpha - \beta - \lambda & 0 & 2\alpha - 2\beta \\ 1 & \alpha - \lambda & 2 \\ -\alpha + \beta & 0 & -\alpha + 2\beta - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (\alpha - \lambda) \begin{vmatrix} 2\alpha - \beta - \lambda & 2\alpha - 2\beta \\ -\alpha + \beta & -\alpha + 2\beta - \lambda \end{vmatrix} \stackrel{F_{21}(1)}{=} (\alpha - \lambda) \begin{vmatrix} 2\alpha - \beta - \lambda & 2\alpha - 2\beta \\ \alpha - \lambda & \alpha - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (\alpha - \lambda)^2 \begin{vmatrix} 2\alpha - \beta - \lambda & 2\alpha - 2\beta \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (\alpha - \lambda)^2 (\beta - \lambda). \end{aligned}$$

Así las raíces de $P_A(\lambda)$ son: $\lambda = \alpha$ y $\lambda = \beta$.

- Si $\alpha \neq \beta$, los autovalores son: $\lambda_1 = \alpha$ y $\lambda_2 = \beta$.

La multiplicidad algebraica de $\lambda_1 = \alpha$ es $m_1 = 2$ y la geométrica viene dada por $\dim V(\alpha)$.

$$V(\alpha) = N(A - \alpha I)$$

$$(A - \alpha I)x = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha - \beta & 0 & 2\alpha - 2\beta \\ 1 & 0 & 2 \\ -\alpha + \beta & 0 & -2\alpha + 2\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(A - \alpha I) = \begin{bmatrix} \alpha - \beta & 0 & 2\alpha - 2\beta \\ 1 & 0 & 2 \\ -\alpha + \beta & 0 & -2\alpha + 2\beta \end{bmatrix} \stackrel{F_{12}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ \alpha - \beta & 0 & 2\alpha - 2\beta \\ -\alpha + \beta & 0 & -2\alpha + 2\beta \end{bmatrix}$$

$$\stackrel{\substack{F_{21}(-\alpha+\beta) \\ F_{31}(\alpha-\beta)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rg}(A - \alpha I) = 1 \Rightarrow \mu_1 = \dim V(\alpha) = 2$$

Por otra parte, la multiplicidad geométrica de $\lambda_2 = \beta$ es $\mu_2 = \dim V(\beta) = 1$ pues $m_2 = 1$.

En resumen, si $\alpha \neq \beta$

| | | |
|----------------------|-----------|-------------|
| $\lambda_1 = \alpha$ | $m_1 = 2$ | $\mu_1 = 2$ |
| $\lambda_2 = \beta$ | $m_2 = 1$ | $\mu_2 = 1$ |

y A sí es diagonalizable.

- Si $\alpha = \beta$, tenemos un único autovalor $\lambda = \alpha$ con multiplicidad algebraica $m = 3$. La multiplicidad geométrica viene dada por $\dim V(\alpha)$.

$$V(\alpha) = N(A - \alpha I)$$

$$(A - \alpha I)x = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rg}(A - \alpha I) = 1 \Rightarrow \mu = \dim V(\alpha) = 2$$

En este caso, $m = 3 \neq \mu = 2$, y A no es diagonalizable.

Ejemplo 176 Diagonaliza, si es posible, la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Como A es triangular inferior, sus autovalores son $\lambda_1 = 1$ con $m_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$ con $m_2 = 2$. Sabemos que la multiplicidad geométrica satisface la desigualdad

$1 \leq \mu_1 \leq m_1$. Puesto que $m_1 = 1$, deducimos que $\mu_1 = m_1 = 1$, es decir las multiplicidades algebraicas y geométricas del primer autovalor coinciden.

Para calcular la multiplicidad geométrica del segundo autovalor $\lambda_2 = 2$ hemos de calcular $\dim V(2)$.

$$V(2) = N(A - 2I) = \{x \in \mathbb{R}^3 : (A - 2I)x = 0\}$$

$$\text{se verifica que: } A - 2I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{como } \text{rg}(A - 2I) = 2 \Rightarrow \mu_2 = \dim V(2) = 3 - \text{rg}(A - 2I) = 3 - 2 = 1.$$

En consecuencia, $\mu_2 = 1 \neq 2 = m_2$ y la matriz A no es diagonalizable.

4.3. Diagonalización ortogonal

Definición 177 Una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es ortogonalmente diagonalizable si existe una matriz Q ortogonal, tal que $D = Q^t A Q$ es una matriz diagonal.

Conforme a la Definición anterior y al Teorema 167, diagonalizar ortogonalmente una matriz A equivale a encontrar una base ortonormal de \mathbb{R}^n formada por autovectores.

Las matrices reales simétricas son matrices, que tienen todos los autovalores reales, y que se pueden diagonalizar ortogonalmente. Además sus autovalores y autovectores tiene propiedades particulares que se enuncian a continuación:

Proposición 178 Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz simétrica, entonces los autovectores correspondientes a autovalores distintos son ortogonales.

Demostración:

Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, se verifica: $(Ax) \cdot y = y^t Ax = (A^t y)^t x = x \cdot (A^t y) \underset{A=A^t}{=} x \cdot (Ay)$.

Sean ahora $v_1 \in V_A(\lambda_1)$ y $v_2 \in V_A(\lambda_2)$, cualesquiera, entonces: $Av_1 = \lambda_1 v_1$ y $Av_2 = \lambda_2 v_2$, veamos que $v_1 \cdot v_2 = 0$.

$$\lambda_1(v_1 \cdot v_2) = (\lambda_1 v_1) \cdot v_2 = (Av_1) \cdot v_2 \underset{A=A^t}{=} v_1 \cdot (Av_2) = v_1 \cdot (\lambda_2 v_2) = \lambda_2(v_1 \cdot v_2)$$

$$\text{luego, } \lambda_1(v_1 \cdot v_2) = \lambda_2(v_1 \cdot v_2) \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)(v_1 \cdot v_2) \underset{\lambda_1 \neq \lambda_2}{=} 0 \Rightarrow v_1 \cdot v_2 = 0 \Rightarrow v_1 \perp v_2. \quad \square$$

Corolario 179 Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es simétrica, los subespacios propios de A son ortogonales.

Teorema 180 Una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es ortogonalmente diagonalizable si y sólo si es simétrica.

Demostración:

\Rightarrow Si A es ortogonalmente diagonalizable, entonces existe una matriz Q ortogonal y una matriz D diagonal, tales que $Q^t A Q = D$. Se verifica que $A = Q^t D Q$, y $A^t = (Q^t D Q)^t = Q^t D Q = A \Rightarrow A = A^t$.

\Leftarrow Si A es simétrica los subespacios propios de A son ortogonales. Si hallamos una base ortonormal para cada uno de ellos y reunimos las bases obtendremos una base ortonormal $B = \{w_1, \dots, w_n\}$ de \mathbb{R}^n formada por autovectores de A , y por tanto A será diagonalizable ortogonalmente siendo $Q = [w_1 | \dots | w_n]$ la matriz de paso.

Diagonalización ortogonal

Dada una matriz simétrica $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, el procedimiento para obtener una base ortonormal formada por autovectores es el siguiente:

1) Se calculan los autovalores de A , y ha de verificarse que:

$$m_1 + \dots + m_p = n. \text{ Es decir, ha de haber } n \text{ raíces de } P_A(\lambda).$$

$$\mu_i = m_i, \text{ para todo autovalor } \lambda_i, i = 1, \dots, p.$$

2) Para cada autovalor $\lambda_i, i = 1, \dots, p.$, se determina una base ortonormal de cada subespacio propio $V(\lambda_i)$.

3) Se obtiene la base $B = \{w_1, \dots, w_n\}$ uniendo las bases ortonormales de los subespacios propios de A .

Una vez obtenida la base B , disponiendo las componentes de sus vectores por columnas se obtiene la matriz de paso Q ortogonal. La matriz diagonal viene determinada por los autovalores, escritos en el mismo orden que los vectores correspondientes de la base B . Es decir,

$$Q = [w_1 | \dots | w_n] \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Ejemplo 181 *Diagonalizar ortogonalmente la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$.*

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -2 & 0 \\ -2 & 2 - \lambda & -2 \\ 0 & -2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 3\lambda - 10 = -(\lambda - 5)(\lambda - 2)(\lambda + 1)$$

los autovalores son: $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 5$.

Cálculo de los subespacios propios:

$$\boxed{\lambda_1 = -1} \quad V(-1) = N(A + I) = \{x \in \mathbb{R}^n : (A + I)x = \mathbf{0}\}.$$

$$(A + I)x = \mathbf{0}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \underset{F_{21}(1)}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \underset{F_{32}(2)}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_2 = 2x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2 = 2x_3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x_1 = 2\alpha \\ x_2 = 2\alpha \\ x_3 = \alpha \end{matrix}}$$

luego, $V(-1) = L\{(2, 2, 1)\} = L\{(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})\}$

Obsérvese que se ha dividido por la norma del vector $(2, 2, 1)$ para hallar el vector unitario $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

$$\boxed{\lambda_2 = 2} \quad V(2) = N(A - 2I) = \{x \in \mathbb{R}^n : (A - 2I)x = \mathbf{0}\}$$

$$(A - 2I)x = \mathbf{0}, \quad \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \underset{F_{21}(-2)}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \underset{F_{32}(-\frac{1}{2})}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 = 0 \\ 4x_2 = 2x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = \frac{x_3}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x_1 = -\alpha \\ x_2 = \frac{\alpha}{2} \\ x_3 = \alpha \end{matrix}}$$

luego, $V(2) = L\{(-1, \frac{1}{2}, 1)\} = L\{(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})\}$

$$\boxed{\lambda_3 = 5} \quad V(3) = N(A - 5I) = \{x \in \mathbb{R}^n : (A - 5I)x = \mathbf{0}\}$$

$$(A - 5I)x = \mathbf{0}, \quad \begin{bmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \underset{F_{21}(\frac{-1}{2})}{\sim} \begin{bmatrix} -4 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \underset{F_{21}(-1)}{\sim} \begin{bmatrix} -4 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -4x_1 - 2x_2 = 0 \\ 2x_2 = -2x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{x_3}{2} \\ x_2 = -x_3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x_1 = \frac{\alpha}{2} \\ x_2 = -\alpha \\ x_3 = \alpha \end{matrix}}$$

luego, $V(5) = L\{(1, -2, 2)\} = L\{(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})\}$.

Luego hemos determinado los tres subespacios propios mediante una base ortonormal:

$$V(-1) = L\{(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})\}$$

$$V(2) = L\{(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})\}$$

$$V(5) = L\{(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})\}$$

Uniendo estas bases de los subespacios propios se tiene una base ortonormal de \mathbb{R}^3 formada por autovectores:

$$B = \{w_1, w_2, w_3\} \text{ siendo } w_1 = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}), w_2 = (-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \text{ y } w_3 = (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}).$$

$$Q = [w_1|w_2|w_3] = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = Q^t A Q.$$

Ejemplo 182 Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

- a) Diagonalizar A .
 b) Diagonalizar ortogonalmente A .

a) Se puede comprobar fácilmente que los autovalores de A son: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1$, con multiplicidades algebraicas $m_1 = 2$ y $m_2 = 1$; y que los subespacios propios son:

$$V(2) = L\{(1, -1, 0), (1, 0, -1)\} = L\{v_1, v_2\}$$

$$V(-1) = L\{(1, 1, 1)\} = L\{v_3\}$$

Con esta información se sigue que $B = \{v_1, v_2, v_3\} = \{(1, -1, 0), (1, 0, -1), (1, 1, 1)\}$ es una base de \mathbb{R}^3 formada por autovectores de A .

A partir de B se tiene la matriz de paso P que nos permite diagonalizar A y obtener la matriz diagonal D .

$$P = [v_1|v_2|v_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

b) Para diagonalizar ortogonalmente la matriz A hemos de encontrar una base B' ortonormal formada por autovectores de A que sea ortonormal. Para ello vamos a ortonormalizar previamente las bases de los subespacios propios de A .

■ $V(2) = L\{(1, -1, 0), (1, 0, -1)\} = L\{v_1, v_2\}$

Aplicando Gram-Schmidt:

$$u_1 = v_1 = (1, -1, 0)$$

$$u_2 = v_2 + \alpha u_1 = (1, 0, -1) - \frac{1}{2}(1, -1, 0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right).$$

$$u_2 \perp u_1 \Rightarrow u_2 \cdot u_1 = 0$$

$$u_2 \cdot u_1 = (v_2 + \alpha u_1) \cdot u_1 = 0 \Rightarrow v_2 \cdot u_1 + \alpha(u_1 \cdot u_1) = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{v_2 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{pues, } u_1 \cdot u_1 = (1, -1, 0) \cdot (1, -1, 0) = 2 \quad \text{y} \quad v_2 \cdot u_1 = (1, 0, -1) \cdot (1, -1, 0) = 1$$

luego $\{u_1, u_2\}$ es una base ortogonal de $V(2)$. Si dividimos cada vector por su norma se obtiene una base ortonormal $\{w_1, w_2\}$ de $V(2)$.

$$w_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

$$w_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right) = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

$$u_2 \cdot u_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right) \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right) = \frac{3}{2}$$

$$V(2) = L\{w_1, w_2\}.$$

■ $V(-1) = L\{(1, 1, 1)\} = L\{v_3\}$

para hallar una base ortonormal de $V(-1)$ basta normalizar el vector v_3 .

$$w_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$u_3 \cdot u_3 = (1, 1, 1) \cdot (1, 1, 1) = 3$$

por tanto $V(-1) = L\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right\} = L\{w_3\}$

Uniendo las bases ortonormales de $V(2)$ y $V(-1)$ se tiene la base ortonormal de \mathbb{R}^3 formada por autovectores: $B' = \{w_1, w_2, w_3\}$

$$B' = \{w_1, w_2, w_3\}, \text{ con } w_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), w_2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right) \text{ y } w_3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

$$Q = [w_1|w_2|w_3] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = Q^t A Q.$$

4.4. Ejercicios propuestos

1. Obtener los autovalores y bases para los subespacios propios asociados a cada autovalor de las siguientes matrices

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{c) } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{d) } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{e) } \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{f) } \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{g) } \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Calcular los autovalores de la matriz $A = \begin{bmatrix} 10 & -9 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

3. Encontrar los autovalores y bases para los subespacios propios asociados de la matriz A^{25} , siendo

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Encontrar los autovalores y autovectores de A^{-1} , siendo $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

5. Determinar cuáles de las siguientes matrices son diagonalizables

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{c) } \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{d) } \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e) } \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

6. Determinar si las siguientes matrices son diagonalizables y en caso afirmativo encontrar una matriz de paso P y obtener $P^{-1}AP$.

$$\text{a) } \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{c) } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Encontrar una matriz cuadrada de orden dos cuyos autovalores sean 1 y 2 y tal que $V(1) = L\{(1, 1)\}$ y $V(2) = L\{(1, 0)\}$.

8. Encontrar una matriz cuadrada de orden tres cuyos autovalores sean -1 y 2 y tal que $V(2) = L\{(1, 1, -1)\}$ y $V(-1) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - z = 0\}$.

9. Sean $A = \begin{bmatrix} -1 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & -2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Hallad A^6 y B^{10} (sugerencia diagonalizar previamente A y B).

10. Encontrar una matriz de paso ortogonal que diagonalice ortogonalmente a cada una de las siguientes matrices.

a) $\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

11. Los autovalores de una matriz simétrica A , de orden tres, son 1, -2 y 3 y los subespacios propios asociados son $V(1) = L\{(1, 1, -1)\}$, $V(-2) = L\{(0, 1, 1)\}$. Obtener una base para $V(3)$ y averiguar cuál es la matriz A .

12. De una matriz simétrica de orden tres se sabe que tiene por autovalores 1 y -1 y que $V(1) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$. Obtener la matriz.

4.5. Soluciones a los ejercicios propuestos

1. a) $\lambda = 4, m = 2, V(\lambda) = L\{(3, 2)\}$.
 b) $\lambda_1 = 2\sqrt{3}, \lambda_2 = -2\sqrt{3}. V(\lambda_1) = L\{(\sqrt{3}, 2)\}$. y $V(\lambda_2) = L\{(-\sqrt{3}, 2)\}$.
 c) $\lambda = 0, m = 2. V(\lambda) = \mathbb{R}^2$, cualquier base, por ejemplo, $\{(1, 0), (0, 1)\}$.
 d) $\lambda_1 = 1, m_1 = 2. V(\lambda_1) = \mathbb{R}^2$ y $\{(1, 0), (0, 1)\}$ una base de $V(\lambda_1)$.
 e) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 3. V(\lambda_1) = L\{(0, 1, 0)\}, V(\lambda_2) = L\{(1, -2, -1)\}, V(\lambda_3) = L\{(-1, 1, 1)\}$.
 f) $\lambda_1 = 2, m_1 = 1. V(\lambda_1) = L\{(1, 1, 3)\}$.
 g) $\lambda_1 = 2, m_1 = 3. V(\lambda_1) = L\{(-1, -1, 3)\}$.
2. $\lambda_1 = 4, m_1 = 2$.
3. Autovalores de $A : \lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$. Los autovalores de $A^{25} : \lambda_1 = 1^{25} = 1$ y $\lambda_2 = (-1)^{25} = -1$. Los subespacios coinciden: $V(1) = L\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}, V(-1) = L\{(2, -1, 1)\}$.
4. Los autovalores de A son 1, 2 y 3 y los de A^{-1} son sus inversos: $1, \frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$.
 $V_{A^{-1}}(1) = V_A(1) = L\{(1, 0, 1)\}, V_A(2) = V_{A^{-1}}(\frac{1}{2}) = L\{(1, 2, 0)\}$ y $V_A(3) = V_{A^{-1}}(\frac{1}{3}) = L\{(1, 1, 1)\}$.
5. a) A no es diagonalizable, pues $\lambda_1 = 2, m_1 = 2 \neq \mu_1 = 1$.
 b) A no posee ningún autovalor real y es no diagonalizable en \mathbb{R} .
 c) A no es diagonalizable, pues $\lambda_1 = 1, m_1 = \mu_1 = 1$, y $\lambda_2 = 2, m_1 = 2 \neq \mu_2 = 1$.
 d) Los autovalores son todos distintos: 4, -1, 2 y 3, y la matriz es diagonalizable.
 e) No es diagonalizable, pues $\lambda_1 = 2, m_1 = 2 \neq \mu_1 = 1$ y $\lambda_2 = 3, m_2 = 2$.
6. a) $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.
 b) La matriz no es diagonalizable, pues $\lambda_1 = 5, m_1 = 3 \neq \mu_1 = 1$.
 c) $P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
7. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
8. $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

$$9. \quad A^6 = \begin{bmatrix} 1 & -315 & 63 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -315 & 64 \end{bmatrix}, \quad B^{10} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1023 & 1024 \end{bmatrix}.$$

$$10. \quad \text{a) } Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \quad \text{b) } Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{c) } Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

$$\text{d) } Q = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \quad \text{e) } Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{\sqrt{18}} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

$$11. \quad V(3) = L\{(2, -1, 1)\}, \quad A = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{11}{6} \\ \frac{2}{3} & -\frac{11}{6} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$12. \quad A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$