e-mail: **imozas@elx.uned.es**
http://telefonica.net/web/imm

DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES

Equivalencia de matrices cuadradas de orden n.-

Dos matrices cuadradas A y B de orden n son equivalentes si existe una matriz cuadrada P de orden n, no singular ($\det(P) \neq 0$), tal que $A = P^{-1}\cdot B\cdot P$

Obviamente, si A es equivalente a B, B es equivalente a A.

Ejemplos:

Las matrices $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ son equivalentes pues $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ (puede comprobarse).

Las matrices $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 8 & -9 & 10 \\ -3 & 5 & -4 \\ -5 & 10 & -8 \end{pmatrix}$ son equivalentes pues

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & -9 & 10 \\ -3 & 5 & -4 \\ -5 & 10 & -8 \end{pmatrix}$$ (puede comprobarse).

Matriz diagonalizable.-

Una matriz cuadrada es diagonalizable si posee una matriz equivalente que sea diagonal.

Diagonalización de matrices de orden 2.-

Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y calculemos sus valores propios (o autovalores), que son las soluciones de:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-t & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-t \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(ecuación característica)}$$

Pueden presentarse los siguientes casos:

- 1) Dos raices reales distintas t_0 y t_1: entonces la matriz A es equivalente a $\begin{pmatrix} t_0 & 0 \\ 0 & t_1 \end{pmatrix}$, y por tanto es diagonalizable.

- 2) Una raiz real doble t_0 y $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} a_{11}-t_0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-t_0 \end{pmatrix} = 1$: entonces la matriz A es equivalente a $\begin{pmatrix} t_0 & 0 \\ 1 & t_0 \end{pmatrix}$ y no es diagonalizable.

(Si rango $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} a_{11}-t_0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-t_0 \end{pmatrix} = 0$, obviamente $A=\begin{pmatrix} t_0 & 0 \\ 0 & t_0 \end{pmatrix}$ que ya es diagonal).

-3) Dos raices complejas conjugadas a+bi y a–bi: entonces la matriz A es equivalente a $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ y no es diagonalizable.

Las matrices que hemos obtenido en cada caso, equivalentes a A, se denominan matrices de Jordan.

e-mail: **imozas@elx.uned.es**
http://telefonica.net/web/imm

Ejemplos: Vamos a obtener las matrices de Jordan de $A = \begin{pmatrix} -3 & -10 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 34 & 58 \\ -20 & -34 \end{pmatrix}$

Polinomio característico de A: $\begin{vmatrix} -3-t & -10 \\ 3 & 8-t \end{vmatrix} = t^2 - 5t + 6$, cuyas raices son $t_0 = 2$ y $t_1 = 3$, (es diagonalizable), luego $J_A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

[Si se desea comprobar que A y J_A son equivalentes, hallaremos <u>vectores propios</u> asociados a los valores propios encontrados, de la siguiente forma:

- para $t_0 = 2 \rightarrow \begin{pmatrix} -3-2 & -10 \\ 3 & 8-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow$

$\leftrightarrow$ $x + 2y = 0$ $\rightarrow$ tomemos por ejemplo $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$;

- para $t_1 = 3 \rightarrow \leftrightarrow \begin{pmatrix} -6 & -10 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow$ $3x + 5y = 0$ $\rightarrow$ tomemos por ejemplo $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$.

La matriz $P = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ cumple $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -3 & -10 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ (puede comprobarse).]

Polinomio característico de B: $\begin{vmatrix} 1-t & 4 \\ -1 & -3-t \end{vmatrix} = t^2 + 2t + 1$, cuyas raices son $t_0 = -1$, doble. Como $\text{rg}\begin{pmatrix} 1+1 & 4 \\ -1 & -3+1 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = 1 \rightarrow$ B no es diagonalizable y $J_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Polinomio característico de C: $\begin{vmatrix} 34-t & 58 \\ -20 & -34-t \end{vmatrix} = t^2 + 4$, cuyas raices son $t_0 = 2i$ y $t_1 = -2i$ $\rightarrow$ C no es diagonalizable y $J_C = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

<u>Diagonalización de matrices de orden 3</u>.-

Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ y calculemos sus valores propios de la ecuación característica:

e-mail: **imozas@elx.uned.es**
http://telefonica.net/web/imm

$$\begin{vmatrix} a_{11}-t & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-t & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-t \end{vmatrix} = 0$$

Pueden presentarse los siguientes casos:

- 1) <u>Tres raices reales distintas t_0, t_1 y t_2</u>: entonces la matriz A es equivalente a $\begin{pmatrix} t_0 & 0 & 0 \\ 0 & t_1 & 0 \\ 0 & 0 & t_2 \end{pmatrix}$, y por tanto <u>es diagonalizable</u>.

- 2) <u>Una raiz real simple t_0 y una doble t_1</u>: Se presentan dos subcasos:

2·1) Si $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} a_{11}-t_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-t_1 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-t_1 \end{pmatrix} = 1 \rightarrow$ A es equivalente a $\begin{pmatrix} t_0 & 0 & 0 \\ 0 & t_1 & 0 \\ 0 & 0 & t_1 \end{pmatrix}$ y por tanto <u>diagonalizable</u>.

2·2) Si $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} a_{11}-t_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-t_1 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-t_1 \end{pmatrix} = 2 \rightarrow$ A es equivalente a $\begin{pmatrix} t_0 & 0 & 0 \\ 0 & t_1 & 0 \\ 0 & 1 & t_1 \end{pmatrix}$ y <u>no es diagonalizable</u>.

- 3) <u>Una raiz real triple t_0</u> y $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} a_{11}-t_0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-t_0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-t_0 \end{pmatrix} \neq 0$. Entonces si rg = 1, A es equivalente a $\begin{pmatrix} t_0 & 0 & 0 \\ 0 & t_0 & 0 \\ 0 & 1 & t_0 \end{pmatrix}$ y si rg = 2 A es equivalente a $\begin{pmatrix} t_0 & 0 & 0 \\ 1 & t_0 & 0 \\ 0 & 1 & t_0 \end{pmatrix}$, o sea <u>no diagonalizable</u>.

(Si rango $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} a_{11}-t_0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-t_0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-t_0 \end{pmatrix} = 0$, obviamente A= $\begin{pmatrix} t_0 & 0 & 0 \\ 0 & t_0 & 0 \\ 0 & 0 & t_0 \end{pmatrix}$ que ya es <u>diagonal</u>).

- 4) <u>Una raiz real t_0 y dos complejas conjugadas a+bi y a–bi</u>: entonces la matriz A es equivalente a $\begin{pmatrix} t_0 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$ y <u>no es diagonalizable</u>.

e-mail: **imozas@elx.uned.es**
http://telefonica.net/web/imm

Ejemplos: Vamos a obtener las matrices de Jordan de A = $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 9 & 12 \\ -1 & -5 & -7 \end{pmatrix}$,

B = $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 6 \\ -2 & -2 & -6 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, C = $\begin{pmatrix} 5 & 11 & 16 \\ -6 & -11 & -14 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ y D = $\begin{pmatrix} 19 & 30 & 42 \\ -9 & -5 & -12 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Para A se obtienen los valores propios $t_0 = 1$, $t_1 = -1$ y $t_2 = 2$, luego A es diagonalizable y $J_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; para B → $t_0 = 3$ y $t_1 = 2$, doble y rg(B–2I) = 1→ es diagonalizable y $J_B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; para C → $t_0 = 2$ y $t_1 = -1$, doble y rg(B+I) = 2 → no es diagonalizable y $J_C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; para D → $t_0 = 10$, $t_1 = 4+3i$ y $t_2 = 4 - 3i$ → no es diagonalizable y $J_D = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.