Capítulo 6

Diagonalización de matrices

6.1. Introducción

6.1.1. Un ejemplo preliminar

Antes de plantearlo de manera general, estudiaremos un ejemplo que servirá para situar el problema.

Supongamos que, en una ciudad, conviven tres fábricas de pan que controlan el mercado de la venta de pan en régimen de oligopolio. A lo largo del tiempo, algunos consumidores cambian de fábrica por diversas razones: publicidad, precio u otras. Queremos modelizar y analizar el movimiento del mercado, asumiendo, para simplificar el modelo, que la misma fracción de consumidores cambia de una empresa a otra durante cada período de tiempo (un mes, por ejemplo).

Supongamos que, al inicio del estudio, las tres empresas, que llamaremos 1, 2 y 3, controlan las fracciones x_0, y_0 y z_0 del mercado respectivamente. Dada la situación de oligopolio, se tendrá:

$$x_0 + y_0 + z_0 = 1$$

Supongamos ahora que después de un mes, la empresa 1 ha conseguido mantener una fracción a_{11} de los consumidores que tenía, atrayendo, además, una fracción a_{12} de los clientes de la empresa 2 y una fracción a_{13} de los clientes de la empresa 3. Si el número de consumidores es fijo, digamos N, podemos escribir, donde x_1 denota la fracción del mercado controlada por 1 después del primer mes:

$$x_1 N = a_{11}(x_0 N) + a_{12}(y_0 N) + a_{13}(z_0 N)$$

Similares ecuaciones se obtendrán para las fracciones de mercado y_1 y z_1 controladas por las empresas 2 y 3 respectivamente, así que, dividiendo dichas ecuaciones por N, se tendrá

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 \\ y_1 = a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 \\ z_1 = a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 \end{array}\right.$$

donde a_{ii} representa la fracción de los consumidores de la empresa i mantenidos por i y a_{ij} la fracción de los consumidores de la empresa j atraídos por la empresa i. En términos matriciales, tenemos

$$X_1 = AX_0, \text{donde } X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \quad X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \quad A = (a_{ij})$$

Sobre la matriz A se puede decir:

- $0 \leq a_{ij} \leq 1$
- La suma de los elementos de cada columna es igual a 1, es decir, $a_{1i}+a_{2i}+a_{3i} = 1$ para $i = 1$, 2 y 3.

Si, como asumimos al principio, las fracciones de clientes que cambian de una empresa a otra cada mes se mantienen constantes, y llamamos x_r, y_r y z_r las fracciones controladas por 1, 2 y 3 en el mes r desde el comienzo del estudio, se tiene:

$$\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ y_{r+1} \\ z_{r+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{pmatrix}$$

y, en consecuencia,

$$\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ y_{r+1} \\ z_{r+1} \end{pmatrix} = A^{r+1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

Es claro, intuitivamente que para cualquier r, $x_r + y_r + z_r = 1$, propiedad que probaremos por inducción sobre r. Para $r = 0$, la propiedad es cierta. Si la propiedad es cierta para r, se tiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{r+1} \\ y_{r+1} \\ z_{r+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{pmatrix} = 1$$

donde la última igualdad es cierta por la hipótesis de inducción.

Resumiendo lo visto anteriormente, el análisis de este mercado implica el cálculo de potencias (posiblemente, grandes) de A.

Ejemplo 6.1 *Como matriz A del modelo anterior tomemos*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{7}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

y supongamos que queremos saber cuál será la fracción de mercado controlada por cada empresa dentro de veinte años. Esto implicaría el cálculo de A^{240}*. El cálculo de dicha potencia se simplifica enormemente sabiendo que las matrices*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{9}{7} \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{4}{7} \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

verifican que $A = PDP^{-1}$*, ya que* $A^{240} = PD^{240}P^{-1}$ *y*

$$D^{240} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^{240} & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{3}{5}\right)^{240} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.1.2. Planteamiento general del problema

El ejemplo anterior pone de manifiesto la necesidad de calcular grandes potencias de matrices. Del mismo modo, queda claro que dicha labor se simplifica supuesta la existencia de una matriz regular P que convierte a la matriz dada en diagonal. En consecuencia, se define:

Definición 6.2 *Dada una matriz cuadrada* $A \in M_n(K)$*, se dice* **diagonalizable** *si existen una matriz diagonal,* $D = diag[d_1, \ldots, d_n]$*, y una matriz regular,* $P \in M_n(K)$*, tales que:*

$$A = PDP^{-1}.$$

Habitualmente, se dice que dos matrices A y B en $M_n(K)$ son **semejantes** si, y sólo si, existe una matriz regular tal que $P^{-1}AP = B$. De este modo, se tiene que una matriz cuadrada es diagonalizable si, y sólo si, es semejante a una diagonal.

A partir de este momento, estudiaremos cómo saber si una matriz es diagonalizable y, en su caso, cómo calcular las matrices diagonal y regular correspondientes.

6.2. Algoritmo de diagonalización

Supongamos dada una matriz diagonalizable A y sean $D = diag[d_1, \ldots, d_n]$ y P regular tales que $P^{-1}AP = D$. En este caso, podemos reescribir esta igualdad en la forma:

$$AP = Pdiag[d_1, \ldots, d_n].$$

Así pues, la columna $j-$ésima de P debe ser una solución del sistema homogéneo

$$(d_iI - A)X = (0), \tag{6.1}$$

lo que, por otro lado, implica $det(d_iI - A) = 0$. Como la matriz P es regular, sus columnas forman una base de K^n formada por soluciones de sistemas de la forma 6.1. Estas consideraciones previas nos llevan a introducir los conceptos recogidos en la siguiente definición:

Definición 6.3 *Sea A una matriz de talla n sobre K.*

i) Se dice polinomio característico de A al polinomio $p_A(\lambda) = det(\lambda I_n - A)$.

ii) Se llama valor propio a cualquiera de las raíces del polinomio característico.

iii) Se dice vector propio asociado al valor propio λ a un vector no nulo v que verifique $Av = tv$; es decir, un vector de la nulidad de la matriz $tI - A$.

La traducción de la discusión anterior al nuevo lenguaje introducido nos permite enunciar el siguiente resultado:

Proposición 6.4 *Una matriz cuadrada es diagonalizable sobre K si, y sólo si, existe una base de K^n formada por vectores propios de A.*

Ejemplo 6.5 *Sea A la matriz dada por*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Su polinomio característico es $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 7\lambda - 2$ cuyas raíces son:

$$\lambda_1 = 1, \ \ \lambda_2 = \frac{1}{2}\left(5 + \sqrt{17}\right), \ \ \lambda_3 = \frac{1}{2}\left(5 - \sqrt{17}\right).$$

Resolviendo los correspondientes sistemas, se obtiene que una base de vectores propios viene dada por:

$$v_1 = (1,0,0), \quad v_2 = \left(0, 1, \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{17}\right)\right) \quad v_3 = \left(0, 1, \frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{17}\right)\right)$$

siendo el vector v_i vector propio asociado a λ_i para $i = 1, 2, 3$.
En consecuencia, si

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\left(5+\sqrt{17}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\left(5-\sqrt{17}\right) \end{pmatrix} \text{ y } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{17}}{2} & -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{17}}{2} \end{pmatrix}$$

se tiene $A = PDP^{-1}$.

El ejemplo anterior pone de manifiesto que el hecho de que una matriz sea diagonalizable depende fuertemente del cuerpo sobre el que se trabaje. Así, la matriz del ejemplo es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$ pero no sobre $\mathbb{Q}$. Del mismo modo, la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

es diagonalizable sobre $\mathbb{C}$ pero no sobre $\mathbb{R}$.

Proposición 6.6 *Dos matrices semejantes poseen el mismo polinomio característico.*

Demostración.– Sean dadas dos matrices semejantes A y B, y sea P una matriz regular P tal que $B = P^{-1}AP$. Entonces,

$$p_B(\lambda) = det(\lambda I_n - B) = det(\lambda I_n - P^{-1}AP) = det(P(\lambda I_n - P^{-1}AP)P^{-1}) =$$

$$= det(\lambda I_n - A) = p_A(\lambda).$$

■

Observación 6.7 *El recíproco a la Proposición anterior no es, en general, cierto como lo el hecho de que las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e I_2 tengan el mismo polinomio característico, pero que no sean semejantes.*

De la discusiones anteriores, y en particular de la Proposición 6.4, para saber si una matriz es diagonalizable, buscaremos los valores propios, esto es, las raíces en K del polinomio característico, digamos, $d_1, \ldots, d_r$ y resolveremos los r sistemas homogéneos $(d_iI - A)X = (0)$. Si podemos construir, por columnas, una matriz regular P, se tendrá:

$$P^{-1}AP = diag[d_1, \ldots, d_1, \ldots, d_r, \ldots, d_r]$$

Naturalmente, puesto que la matriz P debe ser regular, sus columnas deben formar una familia libre, por lo que las soluciones de los sistemas $(d_iI - A)X = (0)$ deben cumplir la misma condición. El problema en la construcción de P, puede venir por dos razones:

1. Al yuxtaponer los vectores columnas obtenidos de dos sistemas distintos de la forma $(d_iI - A)X = (0)$ resultan no ser linealmente independientes.

2. El número de columnas obtenidas de esa manera es inferior a la talla de la matriz inicial A.

La primera de las razones esgrimidas con anterioridad no es problema, como se encarga de demostrar el siguiente resultado (que se puede parafrasear diciendo que *vectores propios asociados a valores propios distintos son linealmente independientes*):

Proposición 6.8 *Sean $\{d_1, \ldots, d_r\}$ los valores propios de A y para cada i, sea S^i un vector propio asociado a d_i. Entonces, la familia $\{S^1 \ldots, S^r\}$ es una familia libre.*

Demostración.– Razonaremos por inducción sobre r (el número de valores propios distintos), siendo el caso $r = 1$ obvio.
Supongamos, ahora, $r \geq 2$ y sea la c.l.

$$t_1S^1 + \cdots + t_rS^r = (0) \tag{6.2}$$

Multiplicando por A, se tiene

$$t_1S^1 + \cdots + t_rS^r = (0) \tag{6.3}$$

Del mismo modo, multiplicando 6.2 por d_r se obtiene

$$t_1d_rS^1 + \cdots + t_rd_rS^r = (0) \tag{6.4}$$

Restando las igualdades 6.3 y 6.4

$$t_1(d_1 - d_r)S^1 + \cdots + t_{r-1}(d_{r-1} - d_r)S^{r-1} = (0)$$

Ahora, dado que $d_j \neq d_r$, los vectores $(d_j - d_r)S^j$ son soluciones de $(d_jI - A)X = (0)$ y, por hipótesis de inducción, son linealmente independientes. Por lo tanto, $t_1 = \cdots = t_{r-1} = 0_K$ y sustituyendo en 6.2, se tiene que también $t_r = 0_K$.

■

Observación 6.9 *Dada una matriz A y un valor propio de la misma, d, designaremos por $S(d)$ a la nulidad de la matriz $dI - A$.*

Se tiene, por lo tanto:

Corolario 6.10 *Sea $\{d_1, \ldots, d_r\}$ el conjunto de valores propios de una matriz $A \in M_n(K)$. Entonces,*

$$\sum_{i=1}^{r} \dim S(d_j) \leq n$$

Corolario 6.11 *Sea A una matriz cuadrada de talla n sobre K y $\{d_1, \ldots, d_r\}$ el conjunto de valores propios de A. Entonces, son equivalentes:*

i) *A es diagonalizable*

ii) $\sum_{i=1}^{r} \dim S(d_j) = n$

iii) $\sum_{i=1}^{r} n - rg(d_j I - A) = n$

Estamos en condiciones de dar un algoritmo para la diagonalización de una matriz cuadrada:

ENTRADA : $A \in M_n(K)$
(1) Calcular las raíces del polinomio $det(\lambda I_n - A)$.
Si no existen raíces, escribir **la matriz A no es diagonalizable sobre K.**
FIN
Sean $(d_1, \ldots, d_r)$ las raíces en K de $det(\lambda I_n - A)$.
(2) Para cada j calcular $m_j := n - rg(d_j I_n - A)$.
(3) Si $\sum_{i=1}^{r} m_j < n$, escribir **la matriz A no es diagonalizable sobre K.** FIN
(4) Si no, para cada j calcular una base, $P_j^1, \ldots, P_j^{m_j}$ de la nulidad de la matriz $d_j I_n - A$.
(5) Devolver $P = [P_1^1, \ldots, P_1^{m_1}, \ldots, P_r^1, \ldots, P_r^{m_r}]$ y $D = diag[d_1, \ldots, d_1, \ldots, d_r, \ldots, d_r]$.

Algoritmo de diagonalización.

6.3. Problemas propuestos

Problema 6.1 .- Demostrar que la relación de semejanza entre matrices de $M_n(K)$ es una relación de equivalencia.

Problema 6.2 .- Sea $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ una matriz que verifica que

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$$

para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$. Demostrar que 1 es valor propio de A.

Problema 6.3 .- Probar que si t es valor propio de A, t^k lo es de A^k.

Problema 6.4 .- Probar:

a) A y A^t poseen mismo polinomio característico.

b) Sea A una matriz antisimétrica. Entonces, se tiene que λ es valor propio de A si, y sólo si, $-\lambda$ es valor propio de $-A$.

c) A es regular si, y sólo si, 0 es valor propio de A.

d) Si A es antisimétrica y de orden impar, 0 es valor propio de A

Problema 6.5 .- Sea A la matriz real

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & a \\ -1 & a & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Probar que la matriz posee un valor propio real independientemente del valor del parámetro a.

Problema 6.6 .- Sea

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

¿Es diagonalizable A sobre $\mathbb{Z}_5$? En caso de respuesta afirmativa, diagonalizarla.

Problema 6.7 .- Calcular los vectores y valores propios de la matriz de orden n cuyos términos son 1_K, salvo los de la diagonal principal que valen 0_K. Probar que A es diagonalizable y diagonalizarla, es decir, encontrar una matriz P regular tal que $P^{-1}AP$ es diagonal.

Problema 6.8 .- ¿Se puede diagonalizar la matriz real

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad 0 \leq \alpha < \pi?$$

¿Y vista como matriz compleja? En los casos de respuesta afirmativa, diagonalizarla.

Problema 6.9 .- Sea $A \in M_n(K)$. Probar que si posee n valores propios distintos (en K) es diagonalizable sobre K.

Problema 6.10 .- Probar que si A y B son matrices cuadradas, AB y BA poseen los mismo valores propios.

Problema 6.11 .- Consideremos la matriz racional

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 & b \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Explicar, **sin hacer ninguna cuenta**, por qué la matriz A es siempre diagonalizable sobre $\mathbb{Q}$, independientemente de los valores de los parámetros a y b.

b) Diagonalizar A.

Problema 6.12 .- Estudiar si las siguientes matrices son diagonalizables sobre $\mathbb{R}$ y, en su caso, diagonalizarlas:

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 10 & 0 \\ 10 & 8 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -9 & 8 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -8 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 12 & -15 \\ 1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1/9 & -3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1/18 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Problema 6.13 .- Estudiar si las matrices del ejercicio anterior son diagonalizables sobre $\mathbb{C}$ y sobre $\mathbb{Z}_5$.

Problema 6.14 .- Estudiar en función de los parámetros a, b, c si las matrices siguientes son diagonalizables:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b & 0 \\ 1 & c & b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2a-1 & 1-a & 1-a \\ a-1 & 1 & 1-a \\ a-1 & 1-a & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 2 \end{pmatrix}$$

Problema 6.15 .- Calcular, usando diagonalización de matrices, el término general de la sucesión recurrente definida por

$$\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 2, \\ u_{n+1} = 3u_n - 2u_{n-1}, \quad \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

Problema 6.16 .- Resolver cada uno de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales que tienen por matriz de coeficientes las matrices del Ejercicio 6.12 que sean diagonalizables sobre los reales.